FYSA114: Vektorianalyysi, kevät 2012
Tentti
15.6.2012

1. Esitä ratavektorin $\mathbf{c}(t) = at^2\mathbf{i} + bt\mathbf{j} + c\ln t\mathbf{k}$ $(1 \leq t \leq T)$ piirtämän käyrän pituus määrättynä integraalina. Laske integraali, kun $b^2 = 4ac$.

2. Laske *integroimalla* pallon $x^2+y^2+z^2 \leq 2$ ja tetraedrin $x+y+z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ väliin jäävän alueen tilavuus.

3. Laske seuraavien muuttujanvaihdosten $(x, y) \to (u, v)$ Jacobin determinantit ja perustele tulokset geometrisesti:

   (a) $x = u + a$, $y = v + b$

   (b) $x = au$, $y = bv$, $a > 1$, $b > 1$

   (c) $x = u\cos\phi - v\sin\phi$, $y = u\sin\phi + v\cos\phi$, missä ϕ on vakio

4. Laske vektorikentän $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ kierto määrittelemääsi kiertosuuntaan paraboloidin $z = 9 - x^2 - y^2$ ja xy-tason leikkausviivaa pitkin.

5. Laske vektorikentän $\mathbf{F} = (y + xz)\mathbf{i} + (y + yz)\mathbf{j} - (2x + z^2)\mathbf{k}$ vuo ulospäin pallon $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ensimmäissä oktantissa $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$ olevan pallokuoren osan läpi.

6. Osoita, että kenttä $\mathbf{F} = xe^{2z}\mathbf{i} + ye^{2z}\mathbf{j} - e^{2z}\mathbf{k}$ on lähteetön ja etsi sille vektoripotentiaali $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$. Vinkki: Oleta, että $A_2 = 0$.