Loppukoe	M4: Vektorianalyysi	fys[illegible]114
Perjantaina 13.5.2011 klo 12	Laske kuusi tehtävää!	Aikaa 4 tuntia

Takasivulla on pieni kaavakokoelma. Laskinta ja taulukkokirjaa ei saa käyttää.

1. Selvitä onko seuraavilla vektorikentillä $\vec{F}(x,y,z)$ potentiaalia, joko osoittamalla, että potentiaalia ei voi olla tai päättelemällä potentiaalifunktio $\phi(x,y,z)$:
   (a) $\vec{F}(x,y,z) = \hat{\imath}\,x - \hat{\jmath}\,2y + \hat{k}\,3z$.
   (b) $\vec{F}(x,y,z) = (\hat{\imath}\,x - \hat{\jmath}\,y)/(x^2+y^2)$.
   (c) $\vec{F}(x,y,z) = \hat{\imath}\,y + \hat{\jmath}\,x - \hat{k}\,z^2$.

2. Laske parametrisoidun käyrän $\vec{r}(t) = \hat{\imath}\,A\cos t + \hat{\jmath}\,A\sin t + \hat{k}\,Bt$ $(0 \le t \le 3\pi)$ pituus.
   Tässä A ja B ovat vakioita.

3. Laske vektorikentän $\vec{F} = \hat{\imath}\,yz + \hat{\jmath}\,xz + \hat{k}\,xy$ käyräintegraali $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ yli käyrän $\vec{C}$, joka on sylinterin $x^2+y^2=1$ ja tason $z=y$ leikkausjoukon osa siten, että käyrä kulkee pisteestä $(-1,0,0)$ pisteeseen $(1,0,0)$.
   Laske kyseinen integraali kummallekin käyrälle, jotka näin voidaan saada.

4. Laske integraali $\int_D f(x,y)\,dA$, missä $f(x,y) = xy^2$ ja äärellisen kokoinen alue alue D on määritelty seuraavasti: Sitä rajoittavat käyrät $y = x^2$ ja $x = y^2$ ja lisäksi $x > 0$ ja $y > 0$ (piirrä ensin kuva alueesta).

5. Laskettavanasi on vektorikentän $\vec{F}(x,y,z) = \hat{\imath}\,x + \hat{\jmath}\,y + \hat{k}\,z$ vuo yli suljetun pinnan S, joka on puolipallon $x^2+y^2+z^2 \le 9$, $z \ge 0$ pinta.
   (a) Laske vuo ensin käyttäen Gaussin lausetta.
   (b) Laske vuo sitten suoraan käyttämättä Gaussin lausetta.

6. Käyrä $\vec{r}(t) = \hat{\imath}\,(1+\cos t) + \hat{\jmath}\,(1+\sin t) + \hat{k}\,(1-\cos t-\sin t)$ pysyy tasossa $x+y+z=3$ ja tutkimme vektorikenttää $\vec{F} = \hat{\imath}\,ye^x + \hat{\jmath}\,(x^2+e^x) + \hat{k}\,z^2e^z$. Laske (tavalla tai toisella) käyräintegraali $I = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r}$ yli kyseisen käyrän, missä $0 \le t \le 2\pi$.

7. (a) Osoita, että $\nabla\cdot(\phi\vec{F}) = (\nabla\phi)\cdot\vec{F} + \phi(\nabla\cdot\vec{F})$, missä $\phi = \phi(x,y,z)$ ja $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$. [5 p]
   (b) Olkoon jossakin tilanteessa niin, että vektorikenttä $\vec{F}$ on lähteetön, että kentän ϕ gradientti on kaikkialla samansuuntainen $\vec{F}$:n kanssa ja että laskettavanasi on kentän $\vec{G}(x,y,z) = \phi(x,y,z)\vec{F}(x,y,z)$ vuo sellaisen suljetun pinnan yli, jonka lokaalit normaalit ovat $\vec{F}$:n suuntaiset. Miten vuon laskeminen (tiettyä lausetta käyttäen) yksinkertaistuu tämän tehtävän tietojen perusteella? [3 p]

Kommentoi ratkaisuideasi ja selitä tekemisesi - se kannattaa! Myös kuvia kannattaa hahmotella.

Joitakin (ehkei aina päteviä) yhtälöitä

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C [F_x(x,y,z)\,dx + F_y(x,y,z)\,dy + F_z(x,y,z)dz] =$$

$$\int_a^b \Big[F_x(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt} + F_y(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt} + F_z(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}\Big]dt.$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C [F_x(x,y,z)\,dx + F_y(x,y,z)\,dy + F_z(x,y,z)dz] =$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

$$\int_D f(x,y)\,dA = \int_{\tilde{D}} \tilde{f}(x,y)\,dA$$

$$\int_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \Big[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\Big]dx \qquad \int_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \Big[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\Big]dy.$$

$$\int_D f(x,y,z)\,dV = \int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad dA = r\,dr\,d\theta$$

$$(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$(x,y,z) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi), \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad dV = \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$dS = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right| du\,dv = \sqrt{\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2}\,du\,dv, \qquad d\vec{S} = \hat{N}dS$$

$$\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} = \left.\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right|_{(u_0,v_0)}$$

$$\int_S f\,dS = \iint f(\vec{r}(u,v))\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right| du\,dv \qquad \int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \pm\iint \vec{F}\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right) du\,dv,$$

$$dS = \sqrt{1 + [\partial_x g(x,y)]^2 + [\partial_y g(x,y)]^2}\,dx\,dy \qquad d\vec{S} = \pm[-\hat{\imath}\,\partial_x g(x,y) - \hat{\jmath}\,\partial_y g(x,y) + \hat{k}]\,dx\,dy$$

$$\int_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \int_D (\nabla\cdot\vec{F})\,dV = \oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}.$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\sin x\cos x + c \qquad \int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\sin x\cos x + c \qquad \int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + c$$