

Takasivulla on pieni kaavakokoelma. Laskinta ja taulukkokirjaa ei saa käyttää.

1. Tason $x + y + z = 1$ ja sylinterin $z = x^2$ leikkaus on paraabeli. Kirjoita kyseiselle käyrälle parametriesitys.
2. (a) Osoita, että $\nabla \cdot (\phi \vec{F}) = (\nabla \phi) \cdot \vec{F} + \phi(\nabla \cdot \vec{F})$, missä $\phi = \phi(x, y, z)$ ja $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$.
(b) Olkoon jossakin tilanteessa niin, että vektorikenttä \vec{F} on lähteetön, että kentän ϕ gradientti on kaikkialla samansuuntainen \vec{F} :n kanssa ja että laskettavanasasi on kentän $\vec{G}(x, y, z) = \phi(x, y, z)\vec{F}(x, y, z)$ vuo sellaisen suljetun pinnan yli, jonka lokaalit normaalit ovat \vec{F} :n suuntaiset. Miten vuo laskeminen (tiettyä lausetta käyttäen) yksinkertaistuu tämän tehtävän tietojen perusteella?
3. Laske integraali $\int_D f(x, y, z) dV$, missä $f(x, y, z) = xy^2 + z^3$ alue D on: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$.
4. Laske integraali $\int_D f(x, y) dA$, missä $f(x, y) = xy^2$ ja äärellisen kokoinen alue D on määritelty seuraavasti: Sitä rajoittavat käyrät $y = x^2$ ja $x = y^2$ ja lisäksi $x > 0$ ja $y > 0$ (piirrä ensin kuva alueesta).
5. Laske vektorikentän $\vec{F} = \hat{i}x^2y^2 + \hat{j}x^3y + \hat{k}e^{z^2}$ käyräintegraali $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ yli suljetun käyrän C , joka on neliön $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $z = 2$ reunaviiva pisteestä $(0, 0, 4)$ katsoen myötäpäivään suunnistettuna.
6. Laske vektorikentän $\vec{F}(x, y, z) = \hat{k}z$ vuo $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ yli pinnan S , jolla $z = [x^2 + y^2]^{1/2}$, $0 \leq z \leq 1$. Valitse pinnan S suunnistus siten, että $\hat{k} \cdot d\vec{S} > 0$. [Katso tarkkaan millaiseksi pinta on määritelty.]
7. Olkoon $\vec{r}(t) = \hat{i}y + \hat{j}z + \hat{k}x$. Osoita, että $\left| \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \right| = \pi a^2 \sqrt{3}$, missä käyrä C saadaan pintojen $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ja $x + y + z = 0$ leikkauksena.

Kommentoi ratkaisuideasi ja selitä tekemisesi - se kannattaa! Myös kuvia kannattaa hahmotella.

Joitakin (ehkei aina päteviä) yhtälöitä

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C [F_x(x, y, z) dx + F_y(x, y, z) dy + F_z(x, y, z) dz] =$$

$$\int_a^b \left[F_x(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + F_y(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + F_z(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right] dt$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

$$\int_D f(x, y) dA = \int_{\tilde{D}} \tilde{f}(x, y) dA$$

$$\int_D f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad \int_D f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

$$\int_D f(x, y, z) dV = \int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz$$

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad dA = r dr d\theta$$

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad dV = r dr d\theta dz$$

$$(x, y, z) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv = \sqrt{\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2} du dv, \quad d\vec{S} = \hat{N} dS$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \Big|_{(u_0, v_0)}$$

$$\int_S f dS = \iint f(\vec{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv \quad \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \pm \iint \vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv,$$

$$dS = \sqrt{1 + [\partial_x g(x, y)]^2 + [\partial_y g(x, y)]^2} dx dy \quad d\vec{S} = \pm [-\hat{i} \partial_x g(x, y) - \hat{j} \partial_y g(x, y) + \hat{k}] dx dy$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_D (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x \cos x + c$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x \cos x + c$$

$$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + c$$