

Takasivulla on pieni kaavakokoelma. Laskinta ja taulukkokirjaa ei tarvita.

- Selvitä onko seuraavilla vektorikentillä $\vec{F}(x, y, z)$ potentiaalia, joko osoittamalla, että potentiaalia ei voi olla tai päättämällä potentiaalifunktio $\phi(x, y, z)$:
 - $\vec{F}(x, y, z) = \hat{i}x - \hat{j}2y + \hat{k}3z$.
 - $\vec{F}(x, y, z) = (\hat{i}x - \hat{j}y)/(x^2 + y^2)$.
 - $\vec{F}(x, y, z) = \hat{i}y + \hat{j}x - \hat{k}z^2$.
- Laske parametrisoidun käyrän $\vec{r}(t) = \hat{i}A \cos t + \hat{j}A \sin t + \hat{k}Bt$ ($0 \leq t \leq 3\pi$) pituus. Tässä A ja B ovat vakioita.
- Laske vektorikentän $\vec{F} = \hat{i}yz + \hat{j}xz + \hat{k}xy$ käyräintegraali $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ yli käyrän C , joka on sylinterin $x^2 + y^2 = 1$ ja tason $z = y$ leikkausjoukon osa siten, että käyrä kulkee pisteestä $(-1, 0, 0)$ pisteeseen $(1, 0, 0)$. Laske kyseinen integraali kummallekin käyrälle, jotka näin voidaan saada.
- Laske integraali $\int_D f(x, y) dA$, missä $f(x, y) = xy^2$ ja äärellisen kokoinen alue D on määritelty seuraavasti: Sitä rajoittavat käyrät $y = x^2$ ja $x = y^2$ ja lisäksi $x > 0$ ja $y > 0$ (piirrä ensin kuva alueesta).
- Laskettavanasi on vektorikentän $\vec{F}(x, y, z) = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ vuo yli suljetun pinnan S , joka on puolipallon $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $z \geq 0$ pinta.
 - Laske vuo ensin käyttäen Gaussin lausetta.
 - Laske vuo sitten suoraan käyttämättä Gaussin lausetta.
- Käyrä $\vec{r}(t) = \hat{i}(1 + \cos t) + \hat{j}(1 + \sin t) + \hat{k}(1 - \cos t - \sin t)$ pysyy tasossa $x + y + z = 3$ ja tutkimme vektorikenttää $\vec{F} = \hat{i}ye^x + \hat{j}(x^2 + e^x) + \hat{k}z^2e^z$. Laske (tavalla tai toisella) käyräintegraali $I = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$ yli kyseisen käyrän, missä $0 \leq t \leq 2\pi$.
- Osoita, että $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$, missä $\phi = \phi(x, y, z)$.
 - Mikä on tämän tuloksen merkitys? [Selitä, älä toista yhtälöä sanallisesti.]

Kommentoi ratkaisuideasi ja selitä tekemisesi - se kannattaa! Myös kuvia kannattaa hahmotella.

Joitakin (ehkei aina päteviä) yhtälöitä

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C [F_x(x, y, z) dx + F_y(x, y, z) dy + F_z(x, y, z) dz] =$$

$$\int_a^b \left[F_x(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + F_y(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + F_z(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right] dt$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

$$\int_D f(x, y) dA = \int_{\tilde{D}} \tilde{f}(x, y) dA$$

$$\int_D f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad \int_D f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

$$\int_D f(x, y, z) dV = \int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz$$

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad dA = r dr d\theta$$

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad dV = r dr d\theta dz$$

$$(x, y, z) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv = \sqrt{\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2} du dv, \quad d\vec{S} = \hat{N} dS$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \Big|_{(u_0, v_0)}$$

$$\int_S f dS = \iint f(\vec{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv \quad \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \pm \iint \vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv,$$

$$dS = \sqrt{1 + [\partial_x g(x, y)]^2 + [\partial_y g(x, y)]^2} dx dy \quad d\vec{S} = \pm [-\hat{i} \partial_x g(x, y) - \hat{j} \partial_y g(x, y) + \hat{k}] dx dy$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \int_D (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin x \cos x + c \quad \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \sin x \cos x + c \quad \int \tan^2 x dx = \tan x - x + c$$