Tentti	M4: Vektorianalyysi	fysA114
Perjantaina 3.6.2011 klo 12	Laske kuusi tehtävää!	Aikaa 4 tuntia

Takasivulla on pieni kaavakokoelma. Laskinta ja taulukkokirjaa ei saa käyttää.

1. Tason $x+y+z=1$ ja sylinterin $z=y^2$ leikkaus on paraabeli. Kirjoita kyseiselle käyrälle parametriesitys.

2. Laske skalaarikentän $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ käyräintegraali yli käyrän $\vec{r}(t)=\hat{\imath}\,t+\hat{\jmath}\,\sin t+\hat{k}\,\cos t$ $(0\le t\le\pi)$.

3. Laske vektorikentän $\vec{F}=\hat{\imath}\,x^2y^2+\hat{\jmath}\,x^3y+\hat{k}\,e^{z^2}$ käyräintegraali $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ yli suljetun käyrän C, joka on neliön $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ z=2$ reunaviiva pisteestä $(0,0,4)$ katsoen vastapäivään suunnistettuna.

4. Laske integraali $\int_D f(x,y,z)\,dV$, missä $f(x,y,z)=xy^2+z^3$ ja alue D on: $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 3$.

5. Laske vektorikentän $\vec{F}(x,y,z)=\hat{k}\,z$ vuo yli pinnan S, jolla $z=[x^2+y^2]^{1/2}$, $0\le z\le 1$. Valitse pinnan S suunnistus siten, että $\hat{k}\cdot d\vec{S}>0$.

6. Olkoon $\vec{r}(t)=\hat{\imath}\,y+\hat{\jmath}\,z+\hat{k}\,x$. Osoita, että $\left|\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}\right|=\pi a^2\sqrt{3}$, missä käyrä C saadaan pintojen $x^2+y^2+z^2=a^2$ ja $x+y+z=0$ leikkauksena. Ohje: Stokesin lause (helpoiten valitsemalla tasossa pysyvä pinta).

7. (a) Osoita, että $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})=0$, missä $\vec{F}(x,y,z)=\hat{\imath}\,F_x(x,y,z)+\hat{\jmath}\,F_y(x,y,z)+\hat{k}\,F_z(x,y,z)$ on vektorikenttä.
(b) Toisinaan tulee tehtäväksi integraaleja $\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$. Millaisille vektorikentille $\vec{F}$ kohdan (a) tulos helpottaa integrointia erityisen paljon?

Kommentoi ratkaisuideasi ja selitä tekemisesi - se kannattaa! Myös kuvia kannattaa hahmotella.

Joitakin (ehkei aina päteviä) yhtälöitä

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))|\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C [F_x(x,y,z)\,dx + F_y(x,y,z)\,dy + F_z(x,y,z)dz] =$$

$$\int_a^b \Big[F_x(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt} + F_y(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt} + F_z(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}\Big]dt$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

$$\int_D f(x,y)\,dA = \int_{\tilde{D}} \tilde{f}(x,y)\,dA$$

$$\int_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \Big[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\Big]dx \qquad \int_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \Big[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\Big]dy.$$

$$\int_D f(x,y,z)\,dV = \int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad dA = r\,dr\,d\theta$$

$$(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$(x,y,z) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi), \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad dV = \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$dS = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right| du\,dv = \sqrt{\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2}\,du\,dv, \qquad d\vec{S} = \hat{N}dS$$

$$\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} = \left.\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right|_{(u_0,v_0)}$$

$$\int_S f\,dS = \iint f(\vec{r}(u,v))\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right| du\,dv \qquad \int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \pm\iint \vec{F}\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right) du\,dv,$$

$$dS = \sqrt{1 + [\partial_x g(x,y)]^2 + [\partial_y g(x,y)]^2}\,dx\,dy \qquad d\vec{S} = \pm[-\hat{\imath}\,\partial_x g(x,y) - \hat{\jmath}\,\partial_y g(x,y) + \hat{k}]\,dx\,dy$$

$$\int_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \int_D (\nabla\cdot\vec{F})\,dV = \oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}.$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\sin x\cos x + c \qquad \int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\sin x\cos x + c \qquad \int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + c$$