

Takasivulla on pieni kaavakokoelma. Laskinta ja taulukkokirjaa ei saa käyttää.

1. Parametrisoi käyrä, joka saadaan tason $x + 2y + 4z = 4$ ja sylinterin $x^2 + 4y^2 = 4$ leikkauksena.
2. Laske vektorikentän $\vec{F} = \hat{i}y + \hat{j}z - \hat{k}x$ käyräintegraali pitkin suoraa viivaa origosta pisteeseen $(1, 1, 1)$.
3. (a) Osoita, että $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$, missä $\vec{F}(x, y, z) = \hat{i}F_x(x, y, z) + \hat{j}F_y(x, y, z) + \hat{k}F_z(x, y, z)$ on vektorikenttä.
(b) Osoita, että $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$, missä F ja G ovat vektorikenttiä.
4. Laske vektorikentän $\vec{F} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ vuo (ulos) pallon $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pinnan läpi.
5. Laske integraali $\int_D f(x, y) dA$, missä $f(x, y) = xy^2$ ja äärellisen kokoinen alue D on määritelty seuraavasti: Sitä rajoittavat käyrät $y = x^2$ ja $x = y^2$ ja lisäksi $x > 0$ ja $y > 0$ (piirrä ensin kuva alueesta).
6. Pinta S olkoon määritelty seuraavasti: $x^2 + y^2 = a^2$, $-b \leq z \leq b$. Laske vektorikentän $\vec{F} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ vuo tämän pinnan läpi, kun pinta S on suunnistettu siten, että $d\vec{S}$ osoittaa z -akselista pois päin (piirrä kuva).
7. Laske integraali $\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$, missä pinta S on puolipallo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, suunnistettuna pois päin pallon keskipisteestä, ja vektorikenttä $\vec{F} = \hat{i}3y - \hat{j}2xz + \hat{k}(x^2 - y^2)$.

Kommentoi ratkaisuideasi ja selitä tekemisesi - se kannattaa! Myös kuvia kannattaa hahmotella.

Joitakin (ehkei aina päteviä) yhtälöitä

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C [F_x(x, y, z) dx + F_y(x, y, z) dy + F_z(x, y, z) dz] =$$

$$\int_a^b \left[F_x(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + F_y(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + F_z(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right] dt$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

$$\int_D f(x, y) dA = \int_{\tilde{D}} \tilde{f}(x, y) dA$$

$$\int_D f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad \int_D f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

$$\int_D f(x, y, z) dV = \int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz$$

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad dA = r dr d\theta$$

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad dV = r dr d\theta dz$$

$$(x, y, z) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv = \sqrt{\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2} du dv, \quad d\vec{S} = \hat{N} dS$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \Big|_{(u_0, v_0)}$$

$$\int_S f dS = \iint f(\vec{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv \quad \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \pm \iint \vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv,$$

$$dS = \sqrt{1 + [\partial_x g(x, y)]^2 + [\partial_y g(x, y)]^2} dx dy \quad d\vec{S} = \pm [-\hat{i} \partial_x g(x, y) - \hat{j} \partial_y g(x, y) + \hat{k}] dx dy$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \int_D (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin x \cos x + c \quad \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \sin x \cos x + c \quad \int \tan^2 x dx = \tan x - x + c$$