FYSA114: Vektorianalyysi, 2012
Tentti
16.11.2012

1. Laske viivaintegraali $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, kun

   (a) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja tienä on $\mathbf{c}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, missä $t = [0, 1]$.

   (b) $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ ja C on käyrä $y = x^3$ origosta pisteeseen $(-2, -8)$.

   (c) $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ ja C on a-säteinen origokeskinen ympyrä yz-tasossa (kiertosuunta valinnainen).

2. Laske integraalit

$$\int_1^2 \left[\int_1^{x^2} (x/y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

   ja

$$\int_0^2 \left[\int_y^2 e^{x^2}\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y.$$

   Integrointijärjestystä kannattanee vaihtaa molemmissa tapauksissa. Esitä integrointialueet myös graafisesti.

3. Laske paikkavektorin $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vuo sylinterin $x^2 + y^2 = \rho^2$ pinnan läpi sekä vuointegraalina että Gaussin lausetta hyödyntäen.

4. (a) Laske origokeskisen a-säteisen pallon massa, kun sen tiheysjakauma on muotoa $\rho(r) = b\,r^2$, jossa r on etäisyys origosta ja b on vakio.

   (b) Laske paraboloidin $z = x^2 + y^2$ ja tason $z = 3$ rajaaman kappaleen massa, kun tiheys on lineaarisesti verrannollinen etäisyyteen z-akselista.

5. Laske

$$\int_C \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r},$$

   kun $\mathbf{u} = (z - 2y)\,\mathbf{i} + (3x - 4y)\,\mathbf{j} + (z + 3y)\,\mathbf{k}$, ja C on yksikköympyrä tasossa $z = 2$.

6. Osoita, että vektorikenttä $\mathbf{u} = 2x\,\mathbf{i}+4y\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$ on konservatiivinen, laske sen potentiaalifunktio ja tarkista vastauksesi gradientin avulla. Onko $\mathbf{u}$ lähteetön?