Kokeessa ei saa käyttää laskinta!

1. Ovatko seuraavat väittämät tosia vai epätosia? Perustele vastauksesi.

   a) Matriisit $\mathbf{AB}$ ja $\mathbf{BA}$ eivät välttämättä ole samat, vaikka sekä $\mathbf{A}$ että $\mathbf{B}$ olisivat saman kokoisia neliömatriiseja. *[2 p]*

   b) Kun $\mathbf{A}$ on neliömatriisi, $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ on symmetrinen matriisi. *[2 p]*

   c) Jos $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ovat matriiseja ja $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, niin $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ tai $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. *[2 p]*

   d) Riviekvivalenteilla matriiseilla on sama determinantti. *[2 p]*

   e) Ortogonaalinen matriisi on aina säännöllinen. *[2 p]*

   f) Kahden hermiittisen neliömatriisin kommutaattori on antihermiittinen. *[2 p]*

2. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

   a) Lue koko tehtävänanto loppuun ja perustele, mikä on järkevin järjestys ratkaista alakohdat b)–e). *[3 p]*

   b) Määritä $\mathbf{A}^{-1}$, mikäli sellainen on olemassa. *[3 p]*

   c) Selvitä, ovatko $\mathbf{A}$:n pystyvektorit lineaarisesti riippumattomia. *[2 p]*

   d) Laske $\det \mathbf{A}$. *[2 p]*

   e) Ratkaise yhtälöryhmä $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. *[2 p]*

3. a) Olkoon $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus, jolle $L(1,1) = 2$ ja $L(1,-1) = -4$. Määritä, mikä on funktion L arvo pisteessä $(2,3)$. *[4 p]*

   b) Olkoon $\mathbf{A}$ matriisi. Osoita, että lineaarisen yhtälöryhmän $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ratkaisut muodostavat vektoriavaruuden. *[4 p]*

   c) Olkoon $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus, joka kiertää kappaleita $180°$ z-akselin ympäri. Määritä lineaarikuvauksen L ominaisarvot ja ominaisvektorit. Geometrinen perustelu riittää mainiosti. *[4 p]*

4. Olkoon matriisit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2-2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} & 5 & \mathrm{i}-1 \\ 1-\mathrm{i} & -\mathrm{i}-1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 1-3\mathrm{i} \\ 1+3\mathrm{i} & 7 \end{pmatrix}.$$

   a) Määritä matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit. *[4 p]*

   b) Selvitä, onko matriisi $\mathbf{A}$ diagonalisoituva. *[2 p]*

   c) Matriisilla $\mathbf{B}$ on 3 ominaisarvoa. Selvitä, moniko niistä on reaalinen. *[2 p]*

   d) Etsi unitaarinen matriisi $\mathbf{U}$, joka diagonalisoi matriisin $\mathbf{C}$. *[4 p]*

★ **Jokeritehtävä.** Jouni on Hollywoodissa uuden elokuvansa *"Determinaattori II: Permutaation päivä"* kuvauksissa. Odotellessaan seuraavaa ottoa hän rentoutuu ratkaisemalla sudoku-ristikkoa. Yllättäen paikalle pelmahtaa hänen kolleganssa ja kilpailijansa Sylvesteri Transpoosi. Hänellä on mukanaan taskulaskin, salkullinen rahaa ja naamallaan velmu

Katso myös toinen puoli!

ilme. *"Jouni!"*, hän sanoo, *"Olen kuullut, että olet melkoinen mestari lineaarialgebrassa. Kuulin huhua, että pystyt selvittämään isonkin matriisin ominaisarvoja päässälaskuna. En tietenkään uskonut siitä sanaakaan."* Sylvesteri heiluttaa kädessään olevaa salkkua. *"Saat nämä miljoona dollaria, jos pystyt suoralta kädeltä sanomaan yhdenkin tuon sinun edessäsi olevan* 9×9 *-matriisin ominaisarvon!"*

Jouni nyökkää Sylvesterille ja on hetken tuijottavinaan edessään olevaa sudoku-ristikkoa. *"Eräs tämän matriisin ominaisarvoista on* 45*"*, hän sanoo, ja kohottaa katseensa paperista. Sylvesteri katsoo hetken Jounia hämmästyneenä, nappaa sudoku-ristikon tämän kädestä ja ryhtyy syöttämään sitä taskulaskimeensa. Hetken näpyteltyään hän puraisee laskimen halki, ojentaa rahat Jounille ja lähtee kävelemään pois mutisten vihaisesti. Jouni myhäilee tyytyväisenä ja jatkaa ristikkojen täyttämistä. Hän nimittäin tietää, että *jokaisen* sudoku-ristikon eräs ominaisarvo on 45. Todista tämä, ja saat kolme lisäpistettä. Määrittämällä tätä ominaisarvoa vastaavan ominaisvektorin saat vielä yhden pisteen.

Sudoku-ristikko on 9×9 -lukutaulukko, joka on jaoteltu yhdeksään 3×3-alitaulukkoon. Ristikkoon on sijoiteltu numeroita $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ siten, että jokaisella rivillä, sarakkeella ja alitaulukossa esiintyy kukin numero täsmälleen kerran. Alunperin osa numeroista on tuntemattomia, ja tarkoituksena on päätellä puuttuvat numerot taulukossa olevien numeroiden avulla.

Tästä tehtävästä on mahdollista saada neljä lisäpistettä. Kokeen maksimipistemäärä on kuitenkin 48.

Katso myös toinen puoli!