Kokeessa ei saa käyttää laskinta!

1. Ovatko seuraavat väittämät tosia vai epätosia? Perustele vastauksesi.
   a) Kun $\mathbf{A}$ on neliömatriisi, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ on symmetrinen matriisi. *[2 p]*
   b) Diagonaalimatriisi kommutoi kaikkien matriisien kanssa. *[2 p]*
   c) Jos kahden matriisin ominaisarvot ovat samat, itse matriisit ovat myös samat. *[2 p]*
   d) Singulaarisen matriisin jokin alkio on nolla. *[2 p]*
   e) Jos neliömatriisi $\mathbf{A}$ on säännöllinen, myös matriisi $\mathbf{A}^n$ on säännöllinen kaikille $n = 1, 2, 3, \ldots$. *[2 p]*
   f) Unitaarisella matriisilla ei ole reaalisia ominaisarvoja. *[2 p]*

2. Olkoon
$$\mathbf{A}(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{missä } a \in \mathbb{R}, \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   a) Määritä matriisin $\mathbf{A}(a)$ determinantti. *[3 p]*
   b) Selvitä, millä parametrin a arvoilla matriisi $\mathbf{A}(a)$ on säännöllinen, ja mikä on tällöin sen käänteismatriisi. *[4 p]*
   c) Ratkaise $\mathbf{x}$ yhtälöstä $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$ kun $\mathbf{B} = \mathbf{A}(4)$. *[3 p]*
   d) Määritä matriisin $\mathbf{C}$ aste eli ranki eli $\mathrm{r}(\mathbf{C})$ kun $\mathbf{C} = \mathbf{A}(2)$. *[2 p]*

3. a) Olkoon $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, jonka matriisiesitys on
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Selvitä kuvia piirtämällä, minkä muotoiseksi kappaleeksi tason yksikköneliö kuvautuu kuvauksessa L, ja mikä on kuvauksen L vaikutus tasokuvioihin yleensä. *[4 p]*
   b) Olkoon $\mathcal{V}$ niiden lineaarikuvausten $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko, joille $L(1) = 1$. Onko $\mathcal{V}$ vektoriavaruus? *[4 p]*
   c) Olkoon $\mathbf{U}$ $m \times n$ -matriisi, jonka sarakevektorit ovat keskenään ortonormaalit. Osoita, että kaikille $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
      i) $\mathbf{Ux} \cdot \mathbf{Uy} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$,
      ii) $\|\mathbf{Ux}\| = \|\mathbf{x}\|$

   eli $\mathbf{U}$ säilyttää vektorien pituudet ja niiden väliset kulmat. *[4 p]*

4. Olkoon matriisit.
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \mathrm{i} \\ 1 - \mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$$
   a) Ratkaise matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit. *[4 p]*
   b) Selvitä, onko matriisi $\mathbf{A}$ diagonalisoituva, ja jos se on, diagonalisoi se. *[3 p]*
   c) Selvitä, onko matriisi $\mathbf{B}$ diagonalisoituva, ja jos se on, diagonalisoi se unitaarisella matriisilla. *[5 p]*

Katso myös toinen puoli!

★ **Jokeritehtävä.** Olkoon $\mathbf{A}$ sellainen $n \times n$ -matriisi ($n \geq 2$), jonka jokainen diagonaalialkio on a ja kaikki muut alkiot b, eli

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}, \text{missä } a, b \in \mathbb{R}.$$

Määritä matriisin $\mathbf{A}$ suurin ominaisarvo.

Tästä tehtävästä on mahdollista saada neljä lisäpistettä. Kokeen maksimipistemäärä on kuitenkin 48.

Katso myös toinen puoli!