

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ -4x_1 + x_3 = 7 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Gaussin tai Gaussin-Jordanin eliminoinnilla.

2. (a) Ovatko vektorit

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lineaarisesti riippumattomat?

(b) Mikä on matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

ranki?

3. (a) Laske matriisin

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

determinantti ja jälki. Muodosta sitten matriisi \mathbf{B}^T ja määritä sen determinantti ja jälki.

(b) Muodosta matriisin \mathbf{B} ja edellisen tehtävän matriisin \mathbf{A} tulo (oikeassa järjestyksessä). Mikä on kyseistä matriisituloa vastaavassa yhdistetyssä lineaarikuvauksessa vektorin $(1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ kuva?

4. Määritä tehtävän 3 matriisin \mathbf{B} käänteismatriisi.

5. Etsi reaalialkioisen matriisin

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. Onko matriisi \mathbf{C} diagonalisoituva kaikilla reaalilla b :n arvoilla? Entä jos sallitaan b :n olevan kompleksinen?

6. (a) Määrittele ortogonaaliset, hermiittiset ja unitaariset matriisit.

(b) Onko matriisi

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

ortogonaalinen, hermiittinen tai unitaarinen? Perustele vastauksesi kunkin mahdollisuuden osalta.

(c) Määritä matriisin \mathbf{E} ominaisarvot.