Perjantaina 22.11.2013 | Tentissä ei saa käyttää laskinta. | Aikaa 4 tuntia

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Gaussin tai Gaussin-Jordanin eliminoinnilla.

2. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Mikä on matriisin **A** ranki ja matriisin **B** ranki?
(b) Mitkä ovat homogeenisten yhtälöryhmien $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ ratkaisujen lukumäärät?

3. (a) Laske matriisin

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinantti ja jälki.
(b) Olkoon matriisit **A** ja **B** tehtävän 2 matriiseja ja **C** kohdan 3(a) matriisi. Kuinka monella eri tavalla (eri kertomisjärjestykset) voidaan muodostaa kolmen matriisin **A**, **B** ja **C** tulo?
(c) Laske kommutaattori $[\mathbf{B}, \mathbf{C}]$.

4. Olkoon matriisit **B** ja **C** kuten edellä.
(a) Mitkä matriiseista **B**, **C**, **BC**, **CB** ovat kääntyviä (ts. millä niistä on käänteismatriisi)?
(b) Määritä (a)-kohdan kunkin olion käänteismatriisi silloin, kun se on mahdollista.

5. Määritä matriisien

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. Tässä $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. (a) Millä reaalisten vakioiden a ja b arvoilla matriisi

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & a \\ b & 1/2 \end{pmatrix}$$

on ortogonaalinen?
(b) Miten edellä saaduilla a:n ja b:n arvoilla matriisia **P** vastaava lineaarikuvaus $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kuvaa yksikkövektorit $\hat{\mathbf{i}}_1 = (1\ 0)^{\mathrm{T}}$ ja $\hat{\mathbf{i}}_2 = (0\ 1)^{\mathrm{T}}$?
(c) Osoita (yleisemmin), että ortogonaalimatriisia vastaava lineaarikuvaus säilyttää kahden vektorin sisätulon ja siten myös niiden ortogonaalisuuden ja normit.