Loppukoe 27.6.2013

1. Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia? Perustele vastauksesi.

   a) Kahden antisymmetrisen matriisin kommutaattori on antisymmetrinen.

   b) Riviekvivalenteilla matriiseilla on sama determinantti.

   c) Jos kahden matriisin ominaisarvot ovat samat, niin matriisit ovat samat.

   d) Unitaarisella matriisilla ei ole reaalisia ominaisarvoja.

   e) Olkoon A ja B matriiseja. Jos $AB = 0$, niin joko $A = 0$ tai $B = 0$.

   f) Jos matriisin A joku rivi on sama kuin joku sen sarake, niin $\det A = 0$.

   g) Mikä tahansa lineaarisesti riippuvan vektorijoukon alkioista voidaan esittää muiden lineaarikombinaationa.

   h) Kahden lineaarikuvauksen lineaarikombinaatio on lineaarikuvaus.

   (8p)

2. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ja } b = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Suorita seuraavat laskutoimitukset haluamassasi järjestyksessä:

   - Ratkaise yhtälöryhmä $Ax = b$.
   - Määritä $\det A$.
   - Määritä A^{-1}.
   - Tutki ovatko A:n sarakevektorit lineaarisesti riippumattomia.

   (8p)

3. a) Näytä, että $(x,y) = x^T Ay$ antaa sisätulon $\mathbb{R}^2$:ssa, kun

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (4p)

   b) Käytä a-kohdan sisätuloa ja määritä ne vektorit, jotka ovat ortogonaalisia vektorin $(1,1)$ kanssa. (2p)

   c) Selvitä yleisin mahdollinen reaalimatriisi B, mikä antaa $\mathbb{R}^2$:n "perinteisen" sisätulon

$$(x,y) = x^T By = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i.$$

   (2p)

4. Olkoon $A : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_3 : A(f) = g$, missä

$$g(x) = \int_0^x f(x')\,\mathrm{d}x',$$

missä $\mathscr{P}_n$ on n-asteisten polynomien muodostama vektoriavaruus.

a) Näytä, että A on lineaarikuvaus. (2p)

b) Kirjoita A:n matriisiesitys käyttäen kantana joukon $\{1,x,x^2,x^3\}$ polynomeja. (3p)

c) Kirjoita lauseke A:n matriisiesityksen komponentille A_{ij} indeksien i ja j avulla lausuttuna. (3p)

5. Tunnista ja piirrä yhtälön

$$3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 4$$

määräämä tasokäyrä (x_1,x_2) -koordinaatistoon. Esitä ratkaisussasi yksityiskohtaisesti se, miten muodostetaan symmetrisen matriisin diagonalisoiva ortogonaalinen matriisi ja kuinka sitä käytetään. (8p)

6. **a)** Todista matriisien tulon hermiten konjugaatin laskukaava $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ matriisien komponenttiesitystä käyttäen. (2p)

b) Näytä, että hermiittisen matriisin ominaisarvot ovat aina reaaliset. (3p)

c) Näytä, että yksikkömatriisi σ_0 ja Paulin matriisit σ_1, σ_2 ja σ_3 muodostavat kannan reaalikertoimiseen vektoriavaruuteen, joka koostuu hermiittisistä 2×2 matriiseista.

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Reaalikertoimisessa vektoriavaruudessa vektorin v muodostavan lineaarikombinaation kertoimet ovat reaalisia, eli $v = \sum_n c_n v_n$, missä $c_n \in \mathbb{R}$. (3p)