FYSA116 Integraalimuunnokset Tentti 16.12.2011

Tentin kesto on neljä (4) tuntia. Tentissä ei saa käyttää laskimia.

1. Esitä funktio

$$f(x) = 1 - x^2, \quad x \in [-1, 1],$$

Fourier sarjana.

2. (a) Laske funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin(x), & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ 0, & x > 2\pi, \end{cases}$$

Laplace muunnos.

(b) Osoita lähtien kaavasta (16), että

$$\mathcal{L}(f''')(\alpha) = -f''(0) - \alpha f'(0) - \alpha^2 f(0) + \alpha^3 \mathcal{L}(f)(\alpha),$$

missä $\mathcal{L}(f)(\alpha)$ on funktion $f(x)$ Laplace muunnos.

(c) Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'''(x) - 9y'(x) + y(x) = \cosh(3x),$$

reunaehdoilla $y''(0) = 9, y'(0) = 0, y(0) = 1$, käyttämällä Laplace muunnosta.

3. Etsi differentiaaliyhtälön

$$y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) - y(x) = 0,$$

kaikki ratkaisut käyttämällä Frobeniuksen sarjamenetelmää.

4. Viimeisen luennon tauolla esitellyssä DSI Prophet '08 -syntetisaattorissa on niin sanottu 4-paaluinen ladder-suodatin, jonka siirtofunktion itseisarvon kuvaajaa esiteltiin valkokankaalla. Elektronisessa musiikissa lähes legendaarisen maineen saavuttaneessa Oberheim OB-Xa -syntetisaattorissa on tällaisen suodattimen lisäksi myös niin sanottu 2 -paaluinen state variable -suodatin. Tehtävänäsi on nyt laskea tämän suodattimen siirtofunktio ja analysoida sitä hieman.

   (a) Suodattimen sisääntulosignaalin $x(t)$ ja ulostulosignaalin $y(t)$ välillä on differentiaaliyhtälö

   $$y''(t) + (2-k)\alpha_c y'(t) + \alpha_c^2 y(t) = \alpha_c^2 x(t),$$

   missä α_c on suodattimen katkaisu(kulma)taajuus ja $0 \leq k < 2$ on vahvistuskerroin, joka määrää suodattimen resonanssin määrän. Laske nyt siirtofunktio

   $$H(\alpha) = \frac{\mathcal{F}(y)(\alpha)}{\mathcal{F}(x)(\alpha)},$$

   missä $\mathcal{F}(x)(\alpha)$ on sisääntulevan signaalin $x(t)$ Fourier-muunnos ja $\mathcal{F}(y)(\alpha)$ on ulostulevan signaalin $y(t)$ Fourier-muunnos.

   (b) Kuinka siirtofunktion itseisarvo käyttäytyy matalilla taajuuksilla, eli kun $\alpha = 0$? Entäs kun taajuus on suuri, eli $\alpha \gg \alpha_c$?

   (c) Olkoon $x(t)$ kippiaalto (eli syntetisaattoreista puhuttaessa sahalaita-aalto) jaksonajalla $P = \frac{2\pi}{\alpha_0}$, jolloin sen Fourier-sarjaesitys on

   $$x(t) = \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{i}{n} e^{in\alpha_0 t}.$$

   Esitä ulostulosignaali $y(t)$ Fourier-sarjana. Vinkki: jos jaksollisen funktion $f(t)$ Fourier-sarjan kertoimet ovat c_n ja sen jaksonaika on $P = \frac{2\pi}{\alpha_0}$, niin sen Fourier-muunnoksen $\mathcal{F}(f)(\alpha)$ voi kirjoittaa muodossa

   $$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - n\alpha_0) c_n$$

   (olettaen että suppenemiskysymykset on sopivasti pyyhkäisty maton alle, kuten tässä tehtävässä voi tehdä).

Huom: tämän tehtävän voi tehdä kokonaisuudessaan puhtaasti matemaattisena harjoituksena, vaikka et olisikaan ollut paikalla kuulemassa viimeisen luennon erikoisesitystä.

Kaavakokoelma:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x), && (1)\\
a_n &= \frac{2}{P}\int_a^{a+P} f(x)\cos(n\omega x)dx, \quad n \in \{0,1,2,...\}, && (2)\\
b_n &= \frac{2}{P}\int_a^{a+P} f(x)\sin(n\omega x)dx, \quad n \in \{1,2,...\}, && (3)\\
\omega &= \frac{2\pi}{P}, && (4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-in\omega x}, && (5)\\
c_n &= \frac{1}{P}\int_a^{a+P} f(x)\mathrm{e}^{-in\omega x}dx, \quad n \in \{0,\pm 1,\pm 2,...\}, && (6)\\
\omega &= \frac{2\pi}{P}, && (7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(\alpha) &= g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\alpha x}dx, && (8)\\
\mathcal{F}^{-1}(g)(x) &= F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)\mathrm{e}^{i\alpha x}d\alpha, && (9)\\
\mathcal{F}(f+h)(\alpha) &= \mathcal{F}(f)(\alpha) + \mathcal{F}(h)(\alpha), && (10)\\
\mathcal{F}(cf)(\alpha) &= c\mathcal{F}(f)(\alpha), \quad c \in \mathbb{C} && (11)\\
\mathcal{F}(f')(\alpha) &= i\alpha\mathcal{F}(f)(\alpha), && (12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(\alpha) &= \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}dx = g_L(\alpha), && (13)\\
\mathcal{L}(f+h)(\alpha) &= \mathcal{L}(f)(\alpha) + \mathcal{L}(h)(\alpha), && (14)\\
\mathcal{L}(cf)(\alpha) &= c\mathcal{L}(f)(\alpha), \quad c \in \mathbb{C} && (15)\\
\mathcal{L}(f')(\alpha) &= -f(0) + \alpha\mathcal{L}(f)(\alpha), && (16)
\end{aligned}
$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y), \tag{17}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y), \tag{18}$$

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \tag{19}$$

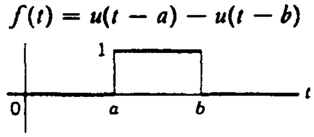
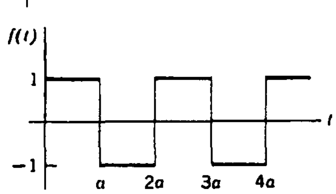
$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right), \tag{20}$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right). \tag{21}$$

A Short Table of Laplace Transforms

	$y = f(t),\ t > 0$ $[y = f(t) = 0,\ t < 0]$	$Y = L(y) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$	
$L1$	1	$\dfrac{1}{p}$	$\operatorname{Re} p > 0$
$L2$	e^{-at}	$\dfrac{1}{p+a}$	$\operatorname{Re}(p+a) > 0$
$L3$	$\sin at$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} a \rvert$
$L4$	$\cos at$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} a \rvert$
$L5$	$t^k,\quad k > -1$	$\dfrac{k!}{p^{k+1}}$ or $\dfrac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
$L6$	$t^k e^{-at},\quad k > -1$	$\dfrac{k!}{(p+a)^{k+1}}$ or $\dfrac{\Gamma(k+1)}{(p+a)^{k+1}}$	$\operatorname{Re}(p+a) > 0$
$L7$	$\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\operatorname{Re}(p+a) > 0$ and $\operatorname{Re}(p+b) > 0$
$L8$	$\dfrac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}$	$\dfrac{p}{(p+a)(p+b)}$	
$L9$	$\sinh at$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Re} a \rvert$
$L10$	$\cosh at$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Re} a \rvert$
$L11$	$t \sin at$	$\dfrac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} a \rvert$
$L12$	$t \cos at$	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} a \rvert$
$L13$	$e^{-at} \sin bt$	$\dfrac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$\operatorname{Re}(p+a) > \lvert \operatorname{Im} b \rvert$
$L14$	$e^{-at} \cos bt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$\operatorname{Re}(p+a) > \lvert \operatorname{Im} b \rvert$
$L15$	$1 - \cos at$	$\dfrac{a^2}{p(p^2+a^2)}$	$\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} a \rvert$

A Short Table of Laplace Transforms (continued)

	$y = f(t),\ t > 0$ $[y = f(t) = 0,\ t < 0]$	$Y = L(y) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$	
$L16$	$at - \sin at$	$\dfrac{a^3}{p^2(p^2 + a^2)}$	$\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} a \rvert$
$L17$	$\sin at - at \cos at$	$\dfrac{2a^3}{(p^2 + a^2)^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} a \rvert$
$L18$	$e^{-at}(1 - at)$	$\dfrac{p}{(p + a)^2}$	$\operatorname{Re} (p + a) > 0$
$L19$	$\dfrac{\sin at}{t}$	$\arctan \dfrac{a}{p}$	$\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} a \rvert$
$L20$	$\dfrac{1}{t} \sin at \cos bt,$ $a > 0,\ b > 0$	$\dfrac{1}{2}\left(\arctan \dfrac{a + b}{p} + \arctan \dfrac{a - b}{p}\right)$	$\operatorname{Re} p > 0$
$L21$	$\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$	$\ln \dfrac{p + b}{p + a}$	$\operatorname{Re} (p + a) > 0$ and $\operatorname{Re} (p + b) > 0$
$L22$	$1 - \operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right), \quad a > 0$	$\dfrac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
$L23$	$J_0(at)$	$(p^2 + a^2)^{-1/2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} a \rvert$, or for real $a \neq 0$, $\operatorname{Re} p \geq 0$
$L24$	$f(t) = \begin{cases} 1, & t > a > 0 \\ 0, & t < a \end{cases}$ [unit step, often written $f(t) = u(t - a)$]	$\dfrac{1}{p} e^{-pa}$	$\operatorname{Re} p > 0$
$L25$	$f(t) = u(t - a) - u(t - b)$ 	$\dfrac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}$	All p
$L26$		$\dfrac{1}{p} \tanh \frac{1}{2}ap$	$\operatorname{Re} p > 0$