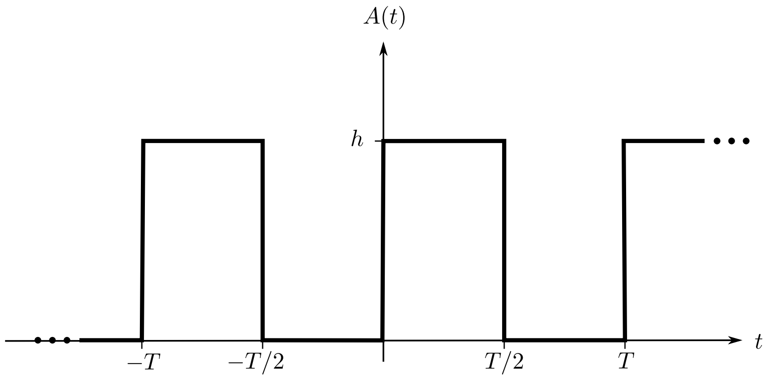
**Kokeessa ei saa käyttää laskinta!**

**1. a)** Esitä kuvassa näkyvä jaksollinen ”kanttiaaltosignaali” $A(t)$ reaalikertoimisena Fourierin sarjana. *[5 p]*




**b)** Jotta funktiolla $f$ olisi Fourierin muunnos, täytyy Fourierin muunnoksen määrittelevän integraalin tietenkin supeta. Tavanomaisessa mielessä tämä tarkoitti, että integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

täytyy supeta. Kuten kurssilla opittiin, matematiikan mielikuvitusmaailma antaa kuitenkin valtavan vapauden valita, mitä ”suppenemisella” varsinaisesti tarkoitetaan. Esimerkiksi Diracin deltafunktion määrittelevät raja-arvot ja integraalit eivät tavanomaisessa mielessä suppene, vaikka intuitiivisesti rajankäynnin tulos on selkeä. Kun suppenemisen määritelmää sopivasti muokataan ja ryhdytään tarkastelemaan funktioiden sijasta distribuutioita, nämä määrittelyongelmat häviävät, ja saadaan hyödyllinen työkalu matematiikan ja fysiikan tarpeisiin.

> *This is a sparring program, similar to the programmed reality of the Matrix. It has the same basic rules, rules like gravity. What you must learn is that these rules are no different than the rules of a computer system. Some of them can be bent. Others can be broken.* — *Morpheus, The Matrix (1999)*

Johda Fourierin muunnoksen avulla Diracin deltafunktiolle hyödyllinen esitysmuoto

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(x-x_0)} \, \mathrm{d}t.$$

Huomaa, että tavanomaisessa mielessä tämä integraali ei suppene – jos suppenisi, olisi $\delta$ tavallinen funktio. *Vinkki:* $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$. *[3 p]*

**c)** Olkoon $f$ jaksollinen funktio, jonka jakso on $P$. Osoita, että funktion Fourierin muunnos voidaan tällöin ilmaista Diracin deltafunktion avulla muodossa

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \delta(\alpha - n\omega),$$

missä $\omega = 2\pi/P$, ja kertoimet $c_n$ ovat funktion kompleksimuotoisen Fourierin sarjan kertoimet. Tulos on taaskin intuitiivisesti selkeä – jos funktio $f$ voidaan pilkkoa komponentteihin, jonka kunkin taajuus on $n\omega$, on funktion Fourierin muunnoksen antama taajuusspektri tietenkin piikkejä näiden taajuuksien kohdalla. *[4 p]*

*Katso myös toinen puoli!*

**2. a)** Osoita, että funktion derivaattojen Laplacen muunnoksille pätee hyödylliset yhtälöt

$$\mathcal{L}(f')(\alpha) = -f(0) + \alpha\mathcal{L}(f)(\alpha)$$
$$\mathcal{L}(f'')(\alpha) = -f'(0) - \alpha f(0) + \alpha^2\mathcal{L}(f)(\alpha). \quad \textit{[6 p]}$$

**b)** Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y''(x) + 4y(x) = 5\cosh(x)$$

alkuehdoilla $y(0) = y'(0) = 1$. Käytä oman valintasi mukaan joko tavallista sarjayritettä, Frobeniuksen sarjayritettä, Greenin funktioita, Fourierin muunnoksia tai Laplacen muunnoksia. *[6 p]*

**3. a)** Kerro muutamalla lauseella, milloin differentiaaliyhtälölle kannattaa etsiä sarjamuotoisia ratkaisuja Frobeniuksen sarjayritteellä, ja milloin tavallinen sarjayrite ($s = 0$) riittää. Kerro myös, milloin Frobeniuksen yritekään ei välttämättä tuota kuin triviaaliratkaisun. *[6 p]*

**b)** Etsi mielestäsi tarkoitukseen sopivalla sarjayritteellä Hermiten differentiaaliyhtälölle

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2\lambda y(x) = 0$$

tapauksessa $\lambda = 2$ sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$. Mieti toki ensin, miten nämä alkuehdot rajoittavat sarjayritteen kertoimia $a_n$. *[6 p]*

**4.** Tarkastellaan sähkömagneettisen aallon etenemistä poikkileikkaukseltaan suorakulmaisessa aaltoputkessa. Olkoon suorakulmion sivujen pituudet $a$ ja $b$, ja olkoon koordinaatisto asetettu siten, että $z$-akseli osoittaa aallon etenemissuuntaan ja $x$- ja $y$-akselit ovat aaltoputken sivujen suuntaiset. Separoimalla aaltoyhtälöstä aikariippuvuus saadaan ns. poikittaiselle sähköiselle moodille eli TE-moodille (*transverse electric*) osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \gamma^2\phi = 0\ , \quad \phi = \phi(x,y), \quad \gamma \text{ on vakio.}$$

**a)** Separoi yllä oleva osittaisdifferentiaaliyhtälö ja kirjoita saadut kaksi differentiaaliyhtälöä. (*Vinkki: valitse separointivakioksi $\alpha^2$ tai $-\alpha^2$ riippuen siitä, miten separoit $x$- ja $y$-osat. Tarkoitus on kuitenkin pyrkiä sini/kosini-tyylisiin värähtelyratkaisuihin. Voit olettaa lisäksi, että $\gamma^2 - \alpha^2 > 0$).* *[4 p]*

**b)** Ratkaise saadut differentiaaliyhtälöt ja kirjoita ratkaisufunktio $\phi(x,y)$. *[4 p]*

**c)** Reunaehdot ongelmalle saadaan Maxwellin yhtälöistä. Näistä yhtälöistä seuraa, että aallon normaaliderivaatat häviävät aaltoputken reunoilla. Tämä tarkoittaa sitä, että

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x=0) = 0 = \frac{\partial\phi}{\partial x}(x=a) \quad \forall\ y$$

ja

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(y=0) = 0 = \frac{\partial\phi}{\partial y}(y=b) \quad \forall\ x\ .$$

Kirjoita nämä reunaehdot toteuttavat ratkaisut. *[4 p]*

*Katso myös toinen puoli!*