

Tentin kesto on neljä (4) tuntia. Tentissä ei saa käyttää laskimia.

1. Esitä funktio

$$f(x) = 1 - x^2, \quad x \in [-1, 1],$$

Fourier sarjana.

2. (a) Laske funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin(x), & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ 0, & x > 2\pi, \end{cases}$$

Laplace muunnos.

- (b) Osoita lähtien kaavasta (16), että

$$\mathcal{L}(f''')(\alpha) = -f''(0) - \alpha f'(0) - \alpha^2 f(0) + \alpha^3 \mathcal{L}(f)(\alpha),$$

missä  $\mathcal{L}(f)(\alpha)$  on funktion  $f(x)$  Laplace muunnos.

- (c) Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'''(x) - 9y'(x) + y(x) = \cosh(3x),$$

reunaehdoilla  $y''(0) = 9, y'(0) = 0, y(0) = 1$ , käyttämällä Laplace muunnosta.

3. Etsi differentiaaliyhtälön

$$y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) - y(x) = 0,$$

kaikki ratkaisut käyttämällä Frobeniuksen sarjamenetelmää.

4. Viimeisen luennon tauolla esitellyssä DSI Prophet '08 -syntetisaattorissa on niin sanottu 4-paaluinen ladder-suodatin, jonka siirtofunktion itseisarvon kuvaajaa esiteltiin valkokankaalla. Elektronisessa musiikissa lähes legendaarisen maineen saavuttaneessa Oberheim OB-Xa -syntetisaattorissa on tällaisen suodattimen lisäksi myös niin sanottu 2 -paaluinen state variable -suodatin. Tehtävänäsi on nyt laskea tämän suodattimen siirtofunktio ja analysoida sitä hieman.

- (a) Suodattimen sisääntulosignaalin  $x(t)$  ja ulostulosignaalin  $y(t)$  välillä on differentiaaliyhtälö

$$y''(t) + (2 - k)\alpha_c y'(t) + \alpha_c^2 y(t) = \alpha_c^2 x(t),$$

missä  $\alpha_c$  on suodattimen katkaisu(kulma)taajuus ja  $0 \leq k < 2$  on vahvistuskerroin, joka määrää suodattimen resonanssin määrän. Laske nyt siirtofunktio

$$H(\alpha) = \frac{\mathcal{F}(y)(\alpha)}{\mathcal{F}(x)(\alpha)},$$

missä  $\mathcal{F}(x)(\alpha)$  on sisääntulevan signaalin  $x(t)$  Fourier-muunnos ja  $\mathcal{F}(y)(\alpha)$  on ulostulevan signaalin  $y(t)$  Fourier-muunnos.

- (b) Kuinka siirtofunktion itseisarvo käyttäytyy matalilla taajuuksilla, eli kun  $\alpha = 0$ ? Entäs kun taajuus on suuri, eli  $\alpha \gg \alpha_c$ ?
- (c) Olkoon  $x(t)$  kippiaalto (eli syntetisaattoreista puhuttaessa sahalaita-aalto) jaksonajalla  $P = \frac{2\pi}{\alpha_0}$ , jolloin sen Fourier-sarjaesitys on

$$x(t) = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{i}{n} e^{in\alpha_0 t}.$$

Esitä ulostulosignaali  $y(t)$  Fourier-sarjana. Vinkki: jos jaksollisen funktion  $f(t)$  Fourier-sarjan kertoimet ovat  $c_n$  ja sen jaksonaika on  $P = \frac{2\pi}{\alpha_0}$ , niin sen Fourier-muunnoksen  $\mathcal{F}(f)(\alpha)$  voi kirjoittaa muodossa

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - n\alpha_0) c_n$$

(olettaen että suppenemiskysymykset on sopivasti pyyhkäisty maton alle, kuten tässä tehtävässä voi tehdä).

Huom: tämän tehtävän voi tehdä kokonaisuudessaan puhtaasti matemaattisena harjoituksena, vaikka et olisikaan ollut paikalla kuulemassa viimeisen luennon erikoisesitystä.

Kaavakokoelma:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x), \quad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{P} \int_a^{a+P} f(x) \cos(n\omega x) dx, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{P} \int_a^{a+P} f(x) \sin(n\omega x) dx, \quad n \in \{1, 2, \dots\}, \quad (3)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{P}, \quad (4)$$

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega x}, \quad (5)$$

$$c_n = \frac{1}{P} \int_a^{a+P} f(x) e^{-in\omega x} dx, \quad n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (6)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{P}, \quad (7)$$

$$\mathcal{F}(f)(\alpha) = g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx, \quad (8)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha, \quad (9)$$

$$\mathcal{F}(f+h)(\alpha) = \mathcal{F}(f)(\alpha) + \mathcal{F}(h)(\alpha), \quad (10)$$

$$\mathcal{F}(cf)(\alpha) = c\mathcal{F}(f)(\alpha), \quad c \in \mathbb{C} \quad (11)$$

$$\mathcal{F}(f')(\alpha) = i\alpha\mathcal{F}(f)(\alpha), \quad (12)$$

$$\mathcal{L}(f)(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-\alpha x} dx = g_L(\alpha), \quad (13)$$

$$\mathcal{L}(f+h)(\alpha) = \mathcal{L}(f)(\alpha) + \mathcal{L}(h)(\alpha), \quad (14)$$

$$\mathcal{L}(cf)(\alpha) = c\mathcal{L}(f)(\alpha), \quad c \in \mathbb{C} \quad (15)$$

$$\mathcal{L}(f')(\alpha) = -f(0) + \alpha\mathcal{L}(f)(\alpha), \quad (16)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y), \quad (17)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y), \quad (18)$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x), \quad (19)$$

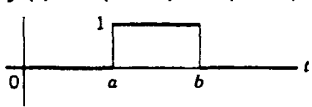
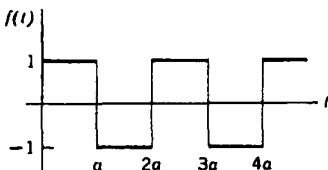
$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}), \quad (20)$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}). \quad (21)$$

## A Short Table of Laplace Transforms

	$y = f(t), t > 0$ [ $y = f(t) = 0, t < 0$ ]	$Y = L(y) = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$	
L1	1	$\frac{1}{p}$	$\operatorname{Re} p > 0$
L2	$e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$	$\operatorname{Re}(p+a) > 0$
L3	$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\operatorname{Re} p >  \operatorname{Im} a $
L4	$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\operatorname{Re} p >  \operatorname{Im} a $
L5	$t^k, k > -1$	$\frac{k!}{p^{k+1}}$ or $\frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
L6	$t^k e^{-at}, k > -1$	$\frac{k!}{(p+a)^{k+1}}$ or $\frac{\Gamma(k+1)}{(p+a)^{k+1}}$	$\operatorname{Re}(p+a) > 0$
L7	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{(p+a)(p+b)} \\ \frac{p}{(p+a)(p+b)} \end{array} \right\}$	$\operatorname{Re}(p+a) > 0$
L8	$\frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}$		and $\operatorname{Re}(p+b) > 0$
L9	$\sinh at$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\operatorname{Re} p >  \operatorname{Re} a $
L10	$\cosh at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\operatorname{Re} p >  \operatorname{Re} a $
L11	$t \sin at$	$\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$	$\operatorname{Re} p >  \operatorname{Im} a $
L12	$t \cos at$	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$\operatorname{Re} p >  \operatorname{Im} a $
L13	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2 + b^2}$	$\operatorname{Re}(p+a) >  \operatorname{Im} b $
L14	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2}$	$\operatorname{Re}(p+a) >  \operatorname{Im} b $
L15	$1 - \cos at$	$\frac{a^2}{p(p^2 + a^2)}$	$\operatorname{Re} p >  \operatorname{Im} a $

**A Short Table of Laplace Transforms (continued)**

	$y = f(t), t > 0$ $[y = f(t) = 0, t < 0]$	$Y = L(y) = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$	
L16	$at - \sin at$	$\frac{a^3}{p^2(p^2 + a^2)}$	$\text{Re } p >  \text{Im } a $
L17	$\sin at - at \cos at$	$\frac{2a^3}{(p^2 + a^2)^2}$	$\text{Re } p >  \text{Im } a $
L18	$e^{-at}(1 - at)$	$\frac{p}{(p + a)^2}$	$\text{Re } (p + a) > 0$
L19	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{p}$	$\text{Re } p >  \text{Im } a $
L20	$\frac{1}{t} \sin at \cos bt,$ $a > 0, b > 0$	$\frac{1}{2} \left( \arctan \frac{a+b}{p} \right.$ $\left. + \arctan \frac{a-b}{p} \right)$	$\text{Re } p > 0$
L21	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$	$\ln \frac{p+b}{p+a}$	$\text{Re } (p+a) > 0$ and $\text{Re } (p+b) > 0$
L22	$1 - \text{erf} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} \right), a > 0$	$\frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}}$	$\text{Re } p > 0$
L23	$J_0(at)$	$(p^2 + a^2)^{-1/2}$	$\text{Re } p >  \text{Im } a ,$ or for real $a \neq 0,$ $\text{Re } p \geq 0$
L24	$f(t) = \begin{cases} 1, & t > a > 0 \\ 0, & t < a \end{cases}$ [unit step, often written $f(t) = u(t - a)$ ]	$\frac{1}{p} e^{-pa}$	$\text{Re } p > 0$
L25	$f(t) = u(t - a) - u(t - b)$ 	$\frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}$	All $p$
L26	$f(t)$ 	$\frac{1}{p} \tanh \frac{1}{2} ap$	$\text{Re } p > 0$