

1. a) Piirrä funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ kun } -\pi \leq x < 0 \\ -2 & , \text{ kun } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

ja sen jaksollisen laajennuksen kuvaajat. [4p]

- b) Muodosta funktion $f(x)$ reaalikertoiminen Fourier-sarja. [8p]

2. a) Etsi funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{ kun } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{ muulloin} \end{cases}$$

Fourier-muunnos $g(\alpha)$. [6p]

- b) Kehitä funktio $f(x)$ Fourier-integraalina $F(x)$, toisin sanoen g :n käänteismuunnoksena. Määritä $F(1)$. [6p]

3. Ratkaise Laplacen muunnosten avulla differentiaaliyhtälö

$$y'' + y = \sin(x)$$

alkuehdoilla $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 0$. [12p]

4. Tarkastellaan Laguerren differentiaaliyhtälöä

$$xy'' + (1 - x)y' + y = 0 .$$

Ratkaise yhtälö käyttäen Frobeniuksen sarjamenetelmää. Kuinka monta lineaarisesti riippumatonta ratkaisua saadaan tällä menetelmällä? [12p]

5. a) Separoi Laplacen yhtälö

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

muuttujissa x ja y ottaen separointivakioksi α^2 , $\alpha \in \mathbb{R}$. Kirjoita näkyviin tuloksena olevat kaksi tavallista differentiaaliyhtälöä. [4p]

- b) Ratkaise a)-kohdan differentiaaliyhtälöt ja kirjoita näkyviin ratkaisufunktio $\phi(x, y)$. [4p]

- c) Etsi ratkaisu $\phi(x, y)$, joka toteuttaa reunaehdot

$$\phi(x, 0) = 0 \text{ kaikilla } x , \quad \phi(0, y) = 0 \text{ kaikilla } y . \quad [4p]$$