FYSA200 2010 TENTTI
Pe 10.9.2010 Koeaika 4 tuntia

1. Etsi differentiaaliyhtälön

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2\cos x$$

yleinen ratkaisu.

2. Käytä Legendren polynomien $P_n(x)$ generoivaa funktiota

$$g(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \qquad |t| < 1$$

ja johda palautuskaava

$$(1+2n)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x).$$

3. Vaimennetun harmonisen värähtelijän siirtymä alkupisteestä x_0 ajan t funktiona on

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{-\alpha t} e^{i\omega_0 t} & \text{jos} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{jos} \quad t < 0 \end{cases}$$

missä α on vaimennusvakio ja ω_0 harmoninen taajuus. Laske Fourier-muunnos $\tilde{x}(\omega) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-i\omega t} dt$ ja osoita, että taajuusjakauma $|\tilde{x}(\omega)|^2$ on

$$|\tilde{x}(\omega)|^2 = \frac{x_0^2}{2\pi} \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + \alpha^2}.$$

4. Tarkastellaan neliömatriiseja

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Laske AB ja $\mathrm{Tr}(\mathsf{AB} - (\mathsf{AB})^{\mathsf{T}})$

b) Tutki, ovatko matriisit (AB), $(\mathsf{A}+\mathsf{B})$, ja $(\mathsf{A}+\mathsf{B}^{\mathsf{T}})$ hermiittisiä.