

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'(x) + y(x)\cos x = \sin(2x).$$

2. Käytä Legendren polynomien  $P_n(x)$  generoivaa funktiota

$$g(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad |t| < 1$$

ja johda palautuskaava

$$(1 + 2n)xP_n(x) = (n + 1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x).$$

3. Vaimennetun harmonisen värähtelijän siirtymä alkupisteestä  $x_0$  ajan  $t$  funktiona on

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{-\alpha t} e^{i\omega_0 t} & \text{jos } t \geq 0 \\ 0 & \text{jos } t < 0 \end{cases}$$

missä  $\alpha$  on vaimennusvakio ja  $\omega_0$  harmoninen taajuus. Laske Fourier-muunnos  $\tilde{x}(\omega) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$  ja osoita, että taajuusjakauma  $|\tilde{x}(\omega)|^2$  on

$$|\tilde{x}(\omega)|^2 = \frac{x_0^2}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2}.$$

4. (a) Esitä matriisi A symmetrisen ja antisymmetrisen matriisin summana.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 & -2 \\ -3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & -34 & 21 \\ 2 & 1 & -2 & 300 \end{pmatrix}$$

(b) Osoita että Paulin spin-matriisit

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

toteuttavat  $\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z$  ja sykliset permutaatiot ja että  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbf{1}$  ( $\mathbf{1}$  on yksikkömatriisi).