FYSA200 Fysiikan matemaattiset menetelmät II **syksy 2009**

Tentti 15.1.2010

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = x^2 - x \ .$$

alkuarvoilla $y(0) = 0$ ja $y'(0) = 0$.

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$x^2 y''(x) + 3xy'(x) - 3y(x) = 0$$

Frobeniuksen sarjamenetelmällä. Onko yhtälöllä singulaarisia pisteitä? Jos on, niin minkä tyyppisiä?

3. a) Rodriguesin esitys Chebyshevin polynomeille $T_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ on

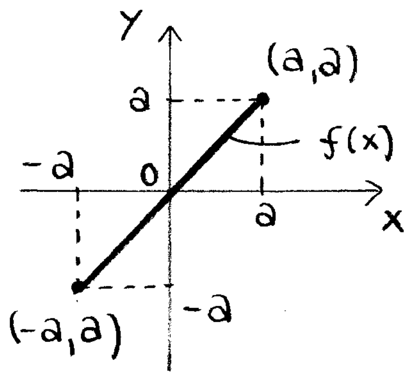
$$T_n(x) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(1 - x^2\right)^{n-1/2} \right] \ .$$

Kirjoita polynomien $T_0(x)$ ja $T_1(x)$ lausekkeet.
b) Muodosta Chebyshevin polynomien palautuskaavaa

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$

käyttäen polynomit $T_3(x)$ ja $T_4(x)$.

4. Määrää oheisen kuvan funktion $f(x)$ kompleksimuotoinen Fourier-sarja, kun tiedetään että sille pätee



$$F(x) = c_0 + c_1 e^{i\omega x} + c_{-1} e^{-i\omega x} + \ldots \ ,$$

missä

$$c_n = \frac{1}{P} \int_b^{b+P} f(x) e^{-in\omega x} dx \ ,$$

ja

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad ; \ \omega = \frac{2\pi}{P} \ .$$

5. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y''(x) + y(x) = \sin x \quad , \ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0$$

käyttäen Laplace-muunnosta $\mathcal{L}(y)(\alpha) = \int_0^\infty y(x) e^{-\alpha x} dx$.

6. Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja vastaavat ominaisvektorit.

Oheismateriaalia:

A Short Table of Laplace Transforms

	$y = f(t),\ t > 0$ $[y = f(t) = 0,\ t < 0]$	$Y = L(y) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$	
L1	1	$\frac{1}{p}$	$\text{Re}\ p > 0$
L2	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\text{Re}\ (p+a) > 0$
L3	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\text{Re}\ p > \lvert \text{Im}\ a \rvert$
L4	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\text{Re}\ p > \lvert \text{Im}\ a \rvert$
L5	$t^k,\ k > -1$	$\frac{k!}{p^{k+1}}$ or $\frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}$	$\text{Re}\ p > 0$
L6	$t^k e^{-at},\ k > -1$	$\frac{k!}{(p+a)^{k+1}}$ or $\frac{\Gamma(k+1)}{(p+a)^{k+1}}$	$\text{Re}\ (p+a) > 0$
L7	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\text{Re}\ (p+a) > 0$ and
L8	$\frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\text{Re}\ (p+b) > 0$
L9	$\sinh at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\text{Re}\ p > \lvert \text{Re}\ a \rvert$
L10	$\cosh at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\text{Re}\ p > \lvert \text{Re}\ a \rvert$
L11	$t \sin at$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$	$\text{Re}\ p > \lvert \text{Im}\ a \rvert$
L12	$t \cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\text{Re}\ p > \lvert \text{Im}\ a \rvert$
L13	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$\text{Re}\ (p+a) > \lvert \text{Im}\ b \rvert$
L14	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$\text{Re}\ (p+a) > \lvert \text{Im}\ b \rvert$
L15	$1 - \cos at$	$\frac{a^2}{p(p^2+a^2)}$	$\text{Re}\ p > \lvert \text{Im}\ a \rvert$
L16	$at - \sin at$	$\frac{a^3}{p^2(p^2+a^2)}$	$\text{Re}\ p > \lvert \text{Im}\ a \rvert$
L17	$\sin at - at \cos at$	$\frac{2a^3}{(p^2+a^2)^2}$	$\text{Re}\ p > \lvert \text{Im}\ a \rvert$
L18	$e^{-at}(1 - at)$	$\frac{p}{(p+a)^2}$	$\text{Re}\ (p+a) > 0$
L19	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{p}$	$\text{Re}\ p > \lvert \text{Im}\ a \rvert$
L20	$\frac{1}{t} \sin at \cos bt,$ $a > 0,\ b > 0$	$\frac{1}{2}\left(\arctan \frac{a+b}{p} + \arctan \frac{a-b}{p}\right)$	$\text{Re}\ p > 0$
L21	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$	$\ln \frac{p+b}{p+a}$	$\text{Re}\ (p+a) > 0$ and $\text{Re}\ (p+b) > 0$