

1. Etsi differentiaaliyhtälön

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2\cos x$$

yleinen ratkaisu.

2. Käytä Legendren polynomien $P_n(x)$ generoivaa funktiota

$$g(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad |t| < 1$$

ja johda palautuskaava

$$(1 + 2n)xP_n(x) = (n + 1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x).$$

3. Vaimennetun harmonisen värähtelijän siirtymä alkupisteestä x_0 ajan t funktiona on

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{-\alpha t} e^{i\omega_0 t} & \text{jos } t \geq 0 \\ 0 & \text{jos } t < 0 \end{cases}$$

missä α on vaimennusvakio ja ω_0 harmoninen taajuus. Laske Fourier-muunnos $\tilde{x}(\omega) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$ ja osoita, että taajuusjakauma $|\tilde{x}(\omega)|^2$ on

$$|\tilde{x}(\omega)|^2 = \frac{x_0^2}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2}.$$

4. Etsi seuraavan matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$