

1. Tarkastellaan neliömatriiseja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Laske AB ja $\text{Tr}(AB - (AB)^T)$

b) Tutki, ovatko matriisit (AB) , $(A + B)$, $(iA + iB - 2il)$, ja $(A + B^T)$ hermiittisiä. l on yksikkömatriisi.

2. Tutkitaan matriiseja

$$s_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad s_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Laske matriisien ominaisarvot ja ominaisvektorit.

b) Laske kommutaattori $[s_x, s_z]$.

c) Diagonalisoi matriisi s_x similariteettimuunnoksella $S^{-1}s_xS$.

3. Vaimennetun harmonisen värähtelijän siirtymä alkupisteestä x_0 ajan t funktiona on

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{-\alpha t} e^{i\omega_0 t} & \text{jos } t \geq 0 \\ 0 & \text{jos } t < 0 \end{cases}$$

missä α on vaimennusvakio ja ω_0 harmoninen taajuus. Laske Fourier-muunnos $\tilde{x}(\omega) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$ ja osoita, että taajuusjakauma $|\tilde{x}(\omega)|^2$ on

$$|\tilde{x}(\omega)|^2 = \frac{x_0^2}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2}.$$

4. Ratkaise alla oleva yhtälöryhmä joko (i) Cramerin menetelmää (sääntöä) käyttäen tai (ii) ratkaisemalla matriisiyhtälö $Ax = b$.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11 \\ x + y + z &= 6 \\ 5x - y + 10z &= 34 \end{aligned}$$