FYSA200, Fysiikan matemaattiset menetelmät II, kl 2010
1. välikoe, 26.2.2010

1. Ratkaise differentiaaliyhtälöt

   (a) (3p) $y'(x) = e^y$ alkuehdolla $y(0) = 0$.

   (b) (3p) $y'(x) - 2y(x)/x = 2x^3$ alkuehdolla $y(1) = 2$.

2. Etsi differentiaaliyhtälön

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2\cos x$$

   yleinen ratkaisu.

3. Sijoittamalla differentiaaliyhtälöön

$$x^2y''(x) + (x + x^3)y'(x) - (3 - 4x^2)y(x) = 0$$

   sarjayrite

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad a_0 \neq 0$$

   johda indeksiyhtälö (eli karakteristinen yhtälö) ja ratkaise tästä r. Mikä on a_1? Johda rekursioyhtälö, joka määrittää muut kertoimet a_n $(n \geq 2)$ kertoimien a_0 ja a_1 avulla. (Rekursioyhtälöä ei tarvitse ratkaista eikä kertoimia a_n $(n \geq 2)$ laskea.)

4. Käyttäen Legendren polynomien $P_n(x)$ generoivaa funktiota

$$g(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

   (tai halutessasi jotain muuta muistamaasi kaavaa tai yhtälöä), johda palautuskaava, joka yhdistää polynomit $P_{n-1}(x)$, $P_n(x)$ ja $P_{n+1}(x)$.