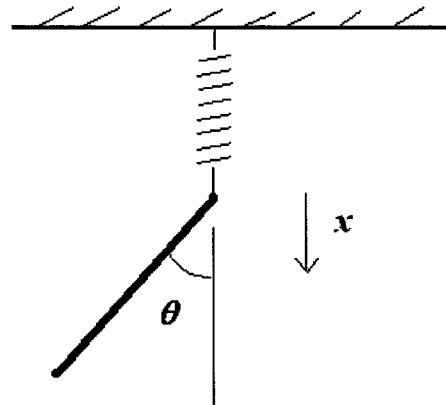


Tentissä on neljä samanarvoista tehtävää.

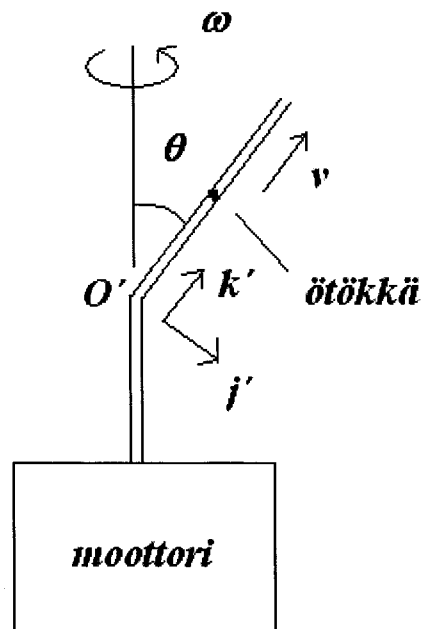
1) Tarkastellaan kuvan mukaista systeemiä, jossa sauva (pituus l , massa m) on ripustettu jouseen (jousivakio k). Jousi voi liikkua vain pystysuunnassa, ja sauvan liike on tasoliikettä. Käytä kuvaan merkittyjä koordinaatteja x ja θ ja muodosta systeemin Lagrangen liikeyhtälöt. Oleta, että $x = 0$, kun systeemi on levossa tasapainotilassa. Sauvan hitausmomentti massakeskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen on $ml^2/12$.



2) Hyvin ohut massaton suora putki on kulmassa θ pystysuuntaan nähden (kuva). Sitä pyöritetään moottorin avulla pystysuoran akselin ympäri vakiokulmanopeudella ω . Pistemäinen ötökkä vaeltaa putkessa vakiovauhdilla v kohti putken yläpäätä.

a) Mitkä ovat ötökkään vaikuttavat näennäisvoimat pyörivän putken koordinaatistossa (j', k')? Käytä muuttujia θ ja r , missä r on ötökän etäisyys origosta O' (kuva).

b) Mikä on ötökän ja putken seinämän välisen kitkavoiman lauseke?



3) Tasa-aineinen sauva, jonka massa on $= M$ ja pituus $= L$, nojaa kitkattomaan seinään ja kitkattomaan lattiaan (y - ja x -akselit). Sauva alkaa kaatua, ja Lagrangen yhtälöiden avulla

voidaan ratkaista kulmanopeudelle $\dot{\theta}$ lauseke $\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \sin\theta)}$

a) Kirjoita sauvan massakeskipisteen (mkp) koordinaatit kulman θ avulla, toisin sanoen muodosta $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\theta)$.

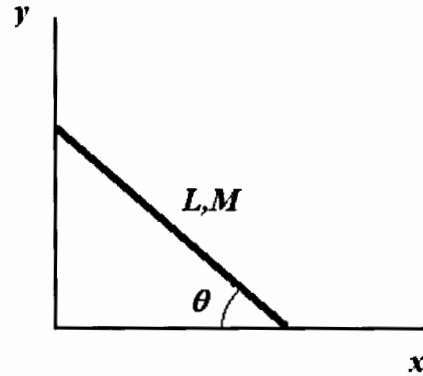
Määritä mkp:n nopeus, kun $\theta = 0$.

b) Määritä sauvan

kokonaispyörimismäärä $L = L(\theta)$ origon suhteen. Määritä sauvaan vaikuttava

kokonaisvääntömomentti $\tau = \tau(\theta)$.

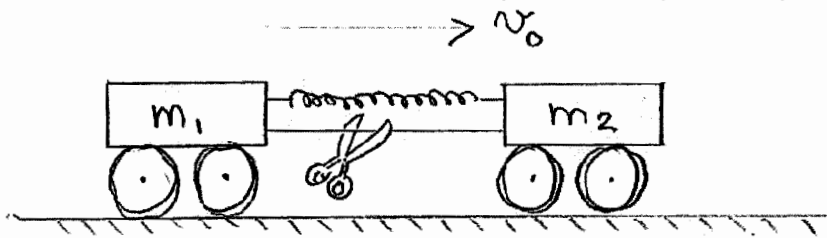
c) Määritä sauvan liike-energia $T = T(\theta)$.



4) a) Tarkastellaan kahden kappaleen (massat m_1 ja m_2) välistä elastista törmäystä, jossa kappale 2 on aluksi levossa laboratoriossa. Johda kappaleen 1 laboratoriokoordinaatistossa havaittavan sirontakulman ψ ja massakeskipistekoordinaatiston sirontakulman θ välinen yhtälö

$$\tan\psi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}}$$

b) Kaksi vaunua (massat: $m_1 = 12$ kg, $m_2 = 18$ kg) on kiinnitetty toisiinsa massattomalla langalla siten, että vaunujen välissä oleva massaton jousi on puristunut lepotilastaan kokoon 0,50 m (kuva). Jousen jousivakio on $k = 960$ N/m. Systeemi etenee tasaisella nopeudella $v_0 = 5,0$ m/s vaakasuoralla kitkattomalla pinnalla. Naru katkeaa, jolloin jousi työntää vaunut erilleen. Laske vaunujen nopeudet a) massakeskipistekoordinaatistossa b) laboratoriokoordinaatistossa, molemmat sen jälkeen, kun jousi on työnsä tehnyt.



Muistin tueksi:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_k \lambda_k \frac{\partial q_k}{\partial q_j} = 0$$