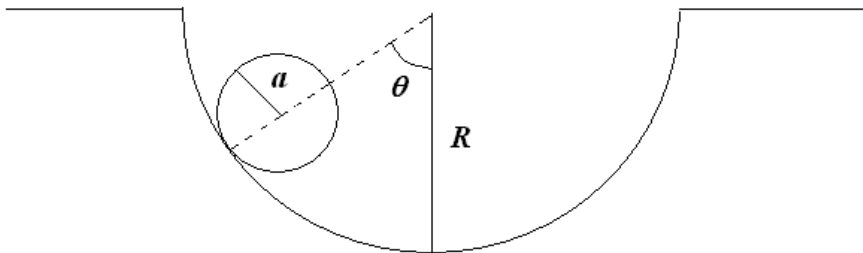
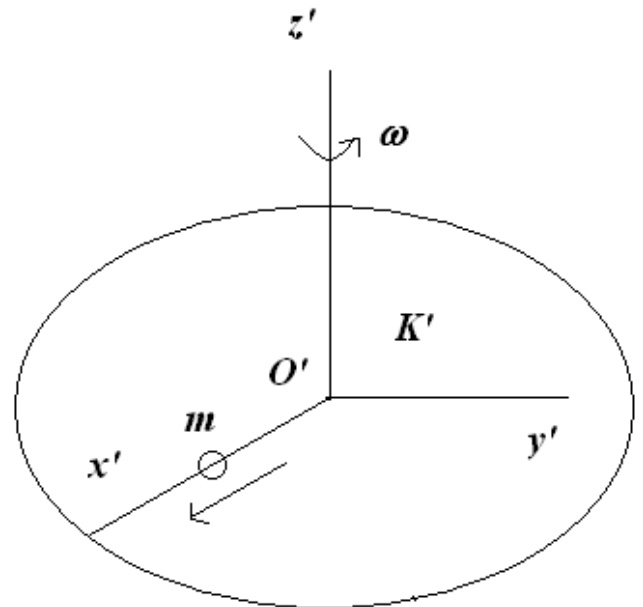


Loppukokeessa on neljä samanarvoista tehtävää.

1) Pallo, jonka säde on a ja massa $= M$ (hitausmomentti massakeskipisteen suhteen on $= 2Ma^2/5$), vierii liukumatta poikkileikkaukseltaan R -säteisen puoliympyrän muotoisessa kourussa kourun poikkileikkauksen tasossa (kuva). Muodosta pallon Lagrangen funktio $L(\theta, \dot{\theta})$, missä kulma θ kuvaa pallon massakeskipisteen kautta kulkevan säteen poikkeamaa pystytasosta, ja kirjoita Lagrangen liikeyhtälö. Mikä on pienten heilahtelujen jaksonaika?



2) Polkupyörän pyörä pyörii vaakatasossa vakiokulmanopeudella ω keskipisteensä kautta kulkevan pystysuoran akselin ympäri. Olkoon pyörän mukana pyörivä koordinaatisto K' . Yhdessä pyörän pinnassa on liimattuna 10 cm etäisyydelle pyörän keskipisteestä reiällinen helmi. Helmen massa on $= m$. Olkoon tämä pyöränpinna x' -akselin suuntainen ja olkoon z' -akseli pyörimisakselin suuntainen. Hetkellä $t = 0$ helmi irtoaa liimauksestaan ja alkaa liukua kitkatta pitkin pinnaa. Kirjoita liukuvaan helmeen vaikuttavien näennäisvoimien (vektoreita!) lausekkeet pyörän keskiöstä lasketun etäisyyden x' ja vauhdin \dot{x}' funktiona. Mitkä ovat näennäisvoimavektorit hetkellä $t = 1,0$ s, kun $\omega = 1,0$ s^{-1} ja $m = 5,0$ g?



3) a) Osoita, että kaksihiukkasjärjestelmässä kokonaisliikemäärämomntti $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ voidaan kirjoittaa muodossa $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{MKP} + \mathbf{L}'$, missä $\mathbf{L}_{MKP} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$, $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}$, $M = m_1 + m_2$, on järjestelmän massakeskipisteen liikemäärämomntti laboratoriokoordinaatistossa ja $\mathbf{L}' = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, $\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{r}}$, on järjestelmän liikemäärämomntti mkp-koordinaatistossa. Tässä \mathbf{R} on massakeskipisteen paikkavektori ja $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ on hiukkasten suhteellinen etäisyys. Edelleen $\mu = m_1 m_2 / M$. b) Osoita, että kaksihiukkasjärjestelmän liike-energia $T = T_1 + T_2$ voidaan lausua muodossa $T = T_{MKP} + T'$, missä $T_{MKP} = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2$ on massakeskipisteen liike-energia laboratoriokoordinaatistossa ja $T' = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2$ on järjestelmän liike-energia mkp-koordinaatistossa.

4) Kaksi kappaletta (massat m_1 ja m_2) törmäävät elastisesti. Alkunopeudet ovat \mathbf{u}_1 ja $\mathbf{u}_2 = \alpha \mathbf{u}_1$, missä α on vakio. Kappaleiden kineettiset energiat ovat alussa yhtä suuret. Kappale 1 on törmäyksen jälkeen levossa. Määritä u_1/u_2 ja m_1/m_2 . Tarkastele sekä positiivisia että negatiivisia α :n arvoja.

Muistin tueksi:

$$\bar{\mathbf{a}}' = \bar{\mathbf{a}} - \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} \times \bar{\mathbf{r}}' - 2\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{v}}' - \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}')$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_j} = 0$$