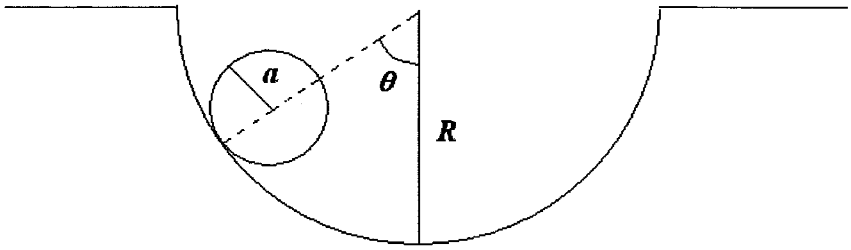
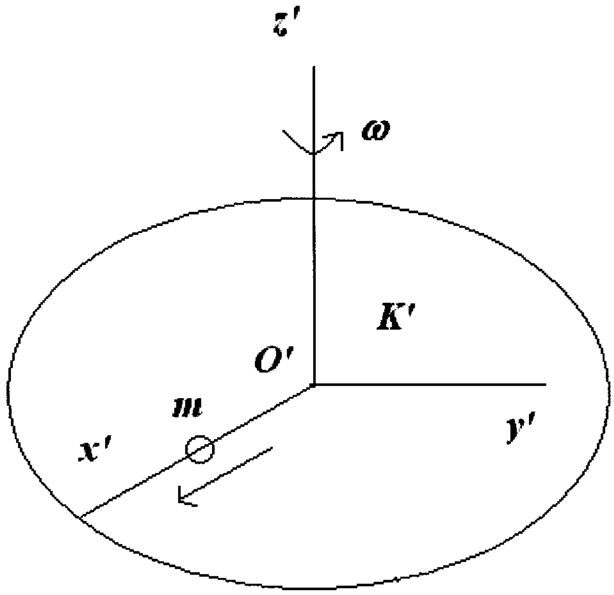
**FYSA210 Mekaniikka** **Loppukoe 11. 3. 2011**

Loppukokeessa on neljä samanarvoista tehtävää.

**1)** Pallo, jonka säde on = $a$ ja massa = $M$ (hitausmomentti massakeskipisteen suhteen on = $2Ma^2/5$), vierii liukumatta poikkileikkaukseltaan $R$-säteisen puoliympyrän muotoisessa kourussa kourun poikkileikkauksen tasossa (kuva). Muodosta pallon Lagrangen funktio $L(\theta, \dot{\theta})$, missä kulma $\theta$ kuvaa pallon massakeskipisteen kautta kulkevan säteen poikkeamaa pystytasosta, ja kirjoita Lagrangen liikeyhtälö. Mikä on pienten heilahtelujen jaksonaika?




**2)** Polkupyörän pyörä pyörii vaakatasossa vakiokulmanopeudella $\omega$ keskipisteensä kautta kulkevan pystysuoran akselin ympäri. Olkoon pyörän mukana pyörivä koordinaatisto $K'$. Yhdessä pyörän pinnassa on liimattuna 10 cm etäisyydelle pyörän keskipisteestä reiällinen helmi. Helmen massa on = $m$. Olkoon tämä pyöränpinna $x'$-akselin suuntainen ja olkoon $z'$-akseli pyörimisakselin suuntainen. Hetkellä $t = 0$ helmi irtoaa liimauksestaan ja alkaa liukua kitkatta pitkin pinnaa. Kirjoita liukuvaan helmeen vaikuttavien näennäisvoimien (vektoreita!) lausekkeet pyörän keskiöstä lasketun etäisyyden $x'$ ja vauhdin $\dot{x}'$ funktiona. Mitkä ovat näennäisvoimavektorit hetkellä $t = 1{,}0$ s, kun $\omega = 1{,}0$ $\text{s}^{-1}$ ja $m = 5{,}0$ g?



**3)** Tarkastellaan hiukkasen energian pienenemistä elastisissa törmäyksissä, kuten esimerkiksi neutronien hidastimissa ydinreaktoreissa. Olkoon liikkuvan hiukkasen (kappale 1) massa $m_1$ ja aluksi paikallaan olevan hiukkasen (kappale 2) massa $m_2$. Merkitään kappaleiden nopeuksia ennen törmäystä tunnuksella $\vec{u}$ ja törmäyksen jälkeen tunnuksella $\vec{v}$. Käytetään pilkkua kuvaamaan massakeskipistekoordinaatiston suureita erotuksena laboratoriokoordinaatiston suureista. Näin esimerkiksi $\vec{u}_2$ = kappaleen 2 nopeus laboratoriossa ennen elastista törmäystä ja $\vec{v}_1'$ = kappaleen 1 nopeus massakeskipistekoordinaatistossa törmäyksen jälkeen. Osoita, että kappaleen 1 kineettiselle energialle $T$ laboratoriossa voidaan johtaa lauseke

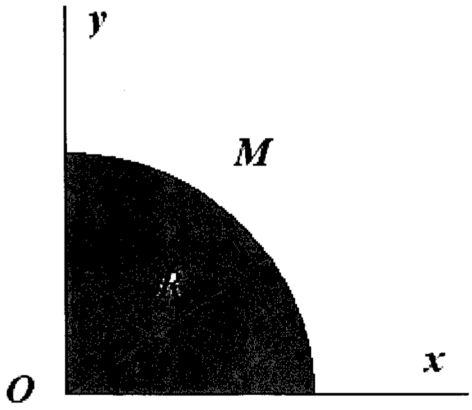
$$\frac{T_{f,1}}{T_{i,1}} = \frac{A^2+2A\cos\psi+1}{(A+1)^2},$$

missä $A = m_2/m_1$ ja $\psi$ = kappaleen 1 sirontakulma laboratoriossa. Tunnus $i$ tarkoittaa tilannetta ennen törmäystä, ja tunnus $f$ tarkoittaa tilannetta törmäyksen jälkeen. Olkoon sitten $\psi = \pi$. Johda lauseke suhteelliselle muutokselle

$$\frac{T_{i,1} - T_{f,1}}{T_{i,1}}$$

ja arvioi, millä massojen suhteen $A$ arvolla saadaan aikaan tehokkain hidastuminen.

**4)** Neljäsosaympyrän muotoinen ohut tasa-aineinen levy, jonka säde on $R$ ja massa $M$, on asetettu $xyz$-koordinaatistoon oheisen kuvan mukaisella tavalla siten, että $z$-akseli osoittaa paperista suoraan ylöspäin.
**a)** Laske levyn hitausmomenttitensori annetussa koordinaatistossa (voit asettaa $z \equiv 0$, koska levy on ohut).
**b)** Etsi levyn päähitausmomentit ja origon kautta kulkevat päähitausakselit.




Muistin tueksi:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' - 2\vec{\omega}\times\vec{v}' - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \sum_k \lambda_k \frac{\partial q_k}{\partial q_j} = 0 \qquad \sin\alpha\cdot\cos\alpha = ½\sin(2\alpha)$$

$$\sin^2(x) = ½[1 - \cos(2x)] \qquad I_{ij} = \int dm\left[\delta_{ij}\sum x_i^2 - x_i x_j\right]$$