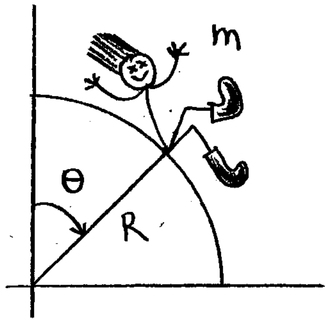
FYSA210 MEKANIIKKA **TENTTI pe. 12.11. 2010**

Kunkin tehtävän maksimipistemäärä on 12.



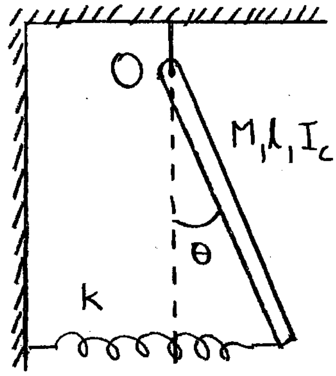
1. Oheisessa kuvassa iloinen FYSA210-kurssin opiskelija (massa m) liukuu kitkatta alas pyllymäeksi jäädytettyä (neljäsosa)ympyräsylinterin kaarevaa pintaa painovoimakentässä (maan vetovoiman kiihtyvyytenä voit käyttää arvoa $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$). Sylinterin poikkileikkauksen säde on $R = 2.0\,\mathrm{m}$. Voit käsitellä opiskelijaa pistemassana.

   (a) Kirjoita opiskelijan Lagrangen funktio kuvan muuttujan θ avulla. Kirjoita vastaava Lagrangen liikeyhtälö $\ddot{\theta}$:lle ja ratkaise opiskelijan kulmakiihtyvyyden arvo kun $\theta = 45°$. [4p]

   (b) Etsitään seuraavaksi opiskelijaan vaikuttava tukivoima. Tukivoiman löytämiseksi vapautetaan radiaalinen suunta r ja asetetaan sidosehto $r = R$. Tällöin sidosehtoa vastaava Lagrangen määräämätön kerroin on haettu tukivoima. Kirjoita nyt opiskelijan Lagrangen funktio muuttujien r ja θ avulla ja etsi vastaavat Lagrangen liikeyhtälöt. Kirjoita opiskelijan kulmakiihtyvyyden ja tukivoiman lausekkeet. [5p]

   (c) Millä kulman θ arvolla opiskelija irtautuu pallon pinnalta? Mikä on tällöin opiskelijan tangentiaalinen nopeus? [3p]

2. Oheisessa kuvassa on esitetty homogeeninen sauva, jonka massa on M, pituus l ja hitausmomentti massakeskipisteensä suhteen $I_c = Ml^2/12$. Sauvan alapää on kiinnitetty harmoniseen jouseen, jonka jousivakio on k. Sauva suorittaa pieniä heilahteluja kitkattomasti ripustuspisteensä O ympäri.

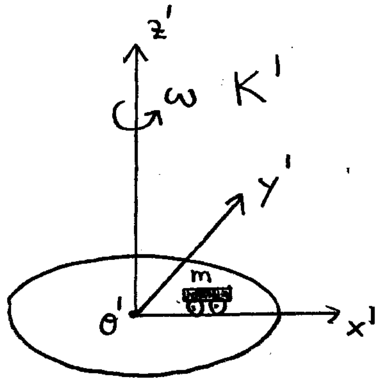


   (a) Kirjoita jousi-sauvasysteemin Lagrangen funktio $L = L(\theta, \dot{\theta})$. [4p]

   (b) Kirjoita jousi-sauvasysteemin Hamiltonin funktio $H = H(\theta, p_\theta)$ ja tutki, onko H liikevakio ja/tai kokonaisenergia. [4p]

   (c) Käyttäen Lagrangen tai Hamiltonin yhtälöitä määritä pienten värähtelyjen kulmataajuus ω. [4p]

3. Karuselli pyörii vakiokulmanopeudella ω pystyakselinsa ympäri. Karusellin ympyränmuotoiselle pohjalavetille on asetettu karusellin mukana pyörivä koordinaatisto $K'(x', y', z')$, missä z'-akseli yhtyy pyörimisakseliin. Lavettiin on x'-suuntaan kiinnitetty pienoisrautatien pätkä, jolla m-massainen vaunu liikkuu kitkatta, kuten oheisessa kuvassa on esitetty. Tällöin vaunun paikka K'-koordinaatistossa on $\mathbf{r}' = x'\hat{\imath}'$ ja sen nopeus on $\mathbf{v}' = \dot{x}'\hat{\imath}'$. Kirjoita liikkuvaan vaunuun vaikuttavan

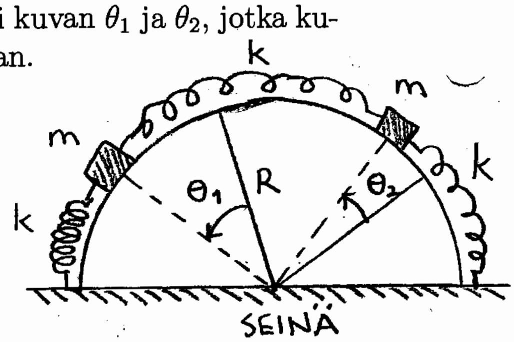


(a) keskipakoisvoiman ja [4p].

(b) Coriolisvoiman lauseke vaunun massan, pyörimiskulmanopeuden, x':n ja $\dot{x}'$:n avulla. [4p]

(c) Karusellin pyöriessä vaunu päästetään liikkeelle levosta (K'-koordinaatistossa!) 10.0 cm:n päästä pyörimisakselista, jolloin se alkaa liikkua kohti karusellin lavetin reunaa. Mitkä ovat vaunuun vaikuttavien keskipakois- ja Coriolisvoimien suuruudet 0.50 s liikkeelle päästämisen jälkeen, kun $\omega = 1.0\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ ja vaunun massa on 1.0 kg? [4p]

4. Tarkastellaan oheisen kuvan massakappaleiden (massat m) ja harmonisten jousien (jousivakiot k) muodostaman systeemin kytkettyjä värähtelyjä. Systeemi on vaakatasossa, jolloin painovoiman osuus tapahtumissa voidaan unohtaa. Massakappaleet makaavat kitkattomalla lattialla ja voivat samalla liikkua kitkatta puoliympyränmuotoisella pinnalla, joka on kiinnitetty oppilaslaboratorion lattiaan ja jämäkkään seinään. Valitaan yleistetyiksi koordinaateiksi kuvan θ_1 ja θ_2, jotka kuvaavat massakappaleiden poikkeamia tasapainoasemistaan.

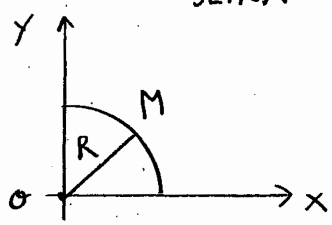


(a) Kirjoita systeemin $\mathcal{T}$-matriisin (liike-energia) ja $\mathcal{U}$-matriisin (potentiaalienergia) lausekkeet. [4p]

(b) Ratkaise systeemin ominaistaajuudet. [4p]

(c) Kirjoita systeemin normitetut ominaisvektorit ja kuvaile sanallisesti/kuvallisesti systeemin normaalimoodeja. [4p]

5. Neljäsosaympyrän muotoinen ohut homogeeninen levy, jonka sade on R ja massa M, on asetettu xyz-koordinaatistoon oheisen kuvan mukaisella tavalla siten, että z-akseli sojottaa paperista suoraan ylöspäin.



(a) Laske levyn hitausmomenttitensori annetussa koordinaatistossa (voit ottaa levyn ohuudesta johtuen $z = 0$). [4p]

(b) Etsi levyn päähitausmomentit ja (origon O kautta kulkevat) päähitausakselit. [4p]

(c) Levy pyörii kuvan x-akselin ympäri vakiokulmakiihtyvyydellä $\alpha = 0.10\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}$. Jos levy alkaa pyöriä levosta ajanhetkellä $t = 0$, niin mikä on origoon O vaikuttava vääntömomentti ajanhetkellä $t = 20.0$ s, kun $M = 1.0$ kg ja $R = 10.0$ cm? [4p]

Hyötytietoa: $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$,
$\sin^2 x = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$, $I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = \tau_1$, $\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_j} = 0$,
$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$, $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$, $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$, $\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$,
$L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j$, $T_{\mathrm{ROT}} = \frac{1}{2}\sum_{ij} \omega_i I_{ij} \omega_j$, $I_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r})\,[\delta_{ij} r^2 - r_i r_j]$,
$T = \frac{1}{2}\sum_{ij} T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$, $U = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j$