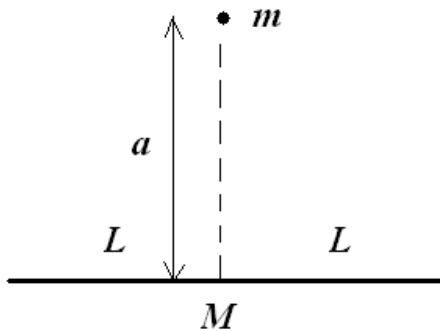


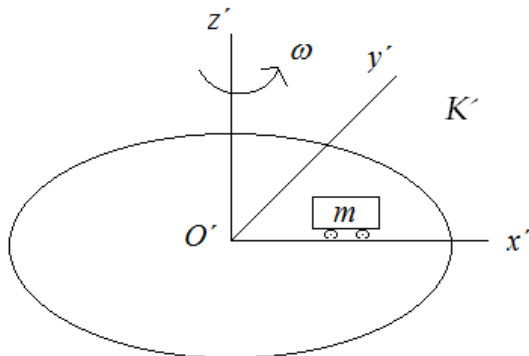
Loppukokeessa on viisi samanarvoista tehtävää.

1) Kappale (massa = m) liikkuu x -akselilla pitkin vaakasuoraa pintaa. Pinnalla on ohut kerros öljyä, jonka aiheuttama liikevastus on verrannollinen kappaleen vauhdin v neliöjuureen. Verrannollisuuskerroin on $= k$. Kappaleen alkuvauhti $v = v_0$ ja paikka $x_0 = 0$ ajanhetkellä $t = 0$. **a)** Mikä on kappaleen nopeus ja paikka ajan t funktiona? **b)** Kuinka pitkälle kappale liikkuu?

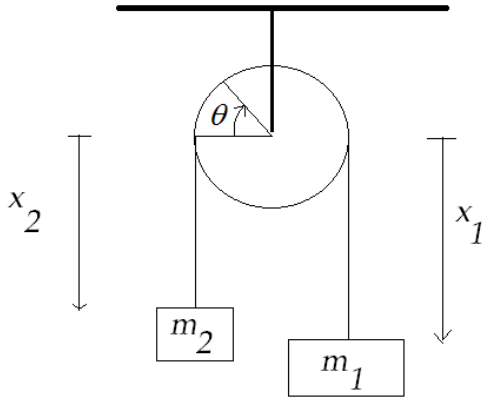
2) Massa M on jakautunut tasaisesti viivalle, jonka pituus $= 2L$. **a)** Kappale, jonka massa on $= m$, on pisteessä, jonka etäisyys viivasta on $= a$ siten, että kappaletta lähinnä oleva viivan piste on viivan puolivälissä (kuva). Määritä voima, jolla viiva vetää kappaletta puoleensa. Lähestytkö laskemasi voima oikeaa raja-arvoa, kun a kasvaa rajatta? **b)** Toista lasku tilanteelle, jossa testikappale (massa $= m$) on samalla suoralla kuin kappale, jonka massa $= M$. (Aseta a mittaamaan etäisyyttä viivan keskipisteestä.)



3) Ympyränmuotoinen tasainen levy pyörii vaakatasossa pystyakselinsa ympäri (kuva). Kulmanopeus ω on vakio. Levyyn on kiinnitetty koordinaatisto $K'(x', y', z')$, missä z' -akseli yhtyy pyörimisakseliin. Levyyn on x' -suuntaan kiinnitetty origosta O' alkava suora kisko, jolla m -massainen vaunu voi liikkua ilman kitkaa (kuva). Kirjoita liikkuvaan vaunuun vaikuttavien näennäisvoimien lausekkeet x' :n ja \dot{x}' :n avulla.



4) Oheisen kuvan mukaisessa systeemissä on $m_1 > m_2$, missä m_i = kappaleen i massa ja $i = 1, 2$. Väkipyörän massa on $= M$ ja säde on $= R$. Kuvaan on merkitty yleistetyt koordinaatit x_1, x_2 ja θ . **a)** Muodosta näitä koordinaatteja käyttäen systeemin Lagrangen yhtälö(t) ja ratkaise kappaleen 1 kiihtyvyys. **b)** Mitkä ovat langan jännitykset? Väkipyörä on homogeeninen sylinteri.



5) Suorakulmisen suuntaissärmiön muotoinen kappale (massa $M = 5$ kg) on levossa kitkattomalla vaakasuoralla pinnalla. Kappaleen päälle heitetään suorakulmisen suuntaissärmiön muotoinen kappale (massa $m = 2$ kg) vaakasuuntaisella alkunopeudella $v_0 = 1,0$ m/s. Kappaleiden välinen liukukitkakerroin on $\mu = 0,2$.

a) Minkä matkan ylempi kappale liikuu alemman kappaleen päällä?

b) Minkä matkan alempi kappale on liukunut, kun ylemmän kappaleen liike alemman kappaleen suhteen pysähtyy? Millä vauhdilla kappaleet tällöin liikkuvat?

c) Mikä on kappaleiden muodostaman järjestelmän kineettisen energian muutos alkutilasta b-kohdan tilanteeseen?

(Siltä varalta, että suorakulmainen suuntaissärmiö eli parallelepiped ei ole tuttu termi: tiiliskivi on tämän muotoinen.)

Muistin tueksi ja muuksi avuksi:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_j} = 0$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2 + x^2)^{1/2}} + \text{vakio}$$