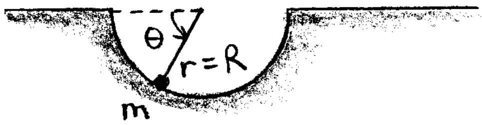
FYSA210 MEKANIIKKA TENTTI pe. 26.3. 2010

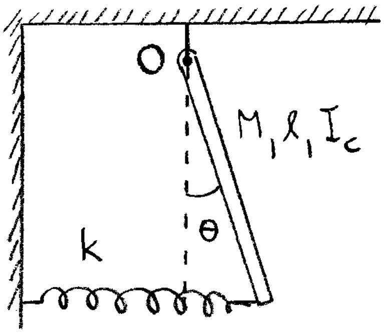
1. Pieni m-massainen kappale lähtee liukumaan levosta poikkileikkaukseltaan puoliympyrän (säde R) muotoista kitkatonta kourua sen yläreunasta $\theta = 0$ (ks. oheinen kuva).



   (a) Muodosta kappaleen Lagrangen liikeyhtälöt käyttäen yleistettyinä koordinaatteina kulmaa θ ja sädettä r, jolle pätee sidosehto $r = R$.

   (b) Määritä pinnan tukivoiman suuruus eo. sidosehtoa vastaavasta Lagrangen määräämättömästä kertoimesta. Apuna voit käyttää kulman θ liikeyhtälöä sekä tietoa $\ddot{\theta} d\theta = \dot{\theta} d\dot{\theta}$.

2. Oheisessa kuvassa on esitetty homogeeninen sauva, jonka massa on M, pituus l ja hitausmomentti massakeskipisteensä suhteen $I_c = Ml^2/12$. Sauvan alapää on kiinnitetty harmoniseen jouseen, jonka jousivakio on k. Sauva suorittaa pieniä heilahteluja kitkattomasti ripustuspisteensä O ympäri.



   (a) Kirjoita jousi-sauvasysteemin Lagrangen funktio $L = L(\theta, \dot{\theta})$.

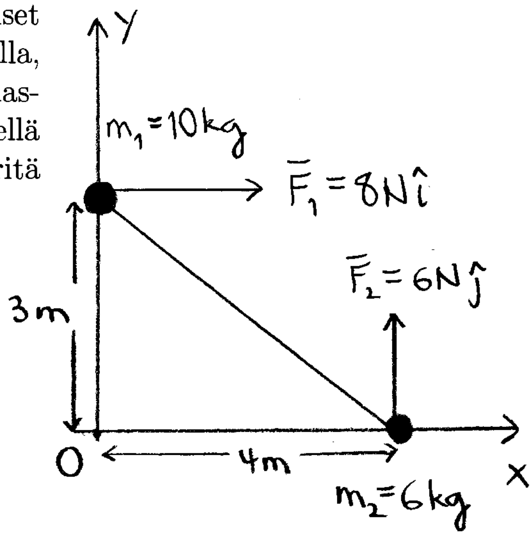
   (b) Kirjoita jousi-sauvasysteemin Hamiltonin funktio $H = H(\theta, p_\theta)$ ja tutki, onko H liikevakio ja/tai kokonaisenergia.

   (c) Käyttäen Lagrangen tai Hamiltonin yhtälöitä määritä pienten värähtelyjen kulmataajuus ω.

3. Viereisessä kuvassa on 10 kg ja 6 kg massaiset teräskuulat yhdistetty toisiinsa hyvin kevyellä tangolla, jonka massa on mitätön verrattuna teräskuulien massoihin. Systeemi on aluksi levossa, mutta ajanhetkellä $t = 0$ kuuliin alkavat vaikuttaa kuvan voimat. Määritä ajanhetkellä $t = 5.0\,\mathrm{s}$ systeemin

   (a) massakeskipisteen koordinaatit ja

   (b) kokonaisliikemäärä.



4. Levylautanen pyörii tasaisella kulmanopeudella 33 kierrosta/min ja sen päällä tepastelee 10 g-massainen leppäkerttu. Eräällä ajanhetkellä leppäkerttu on 10 cm:n etäisyydellä levyn keskipisteestä. Tällöin sen radiaalinen nopeus on 1.0 cm/s ja tangentiaalinen nopeus levyn pyörimissuuntaan on 2.0 cm/s (levyn suhteen mitattuja nopeuksia).

   (a) Ilmoita leppäkertun paikka ja nopeus levylautaseen kiinnitetyissä napakoordinaateissa (r', ϕ')

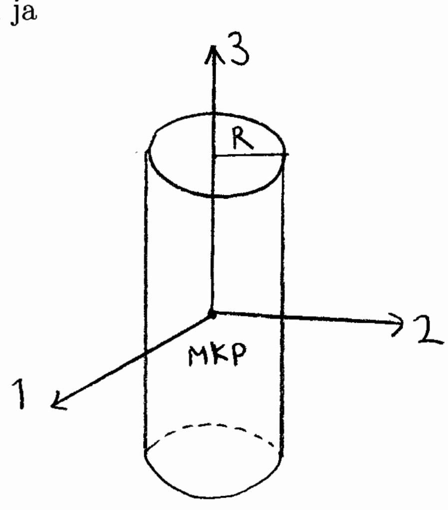
   (b) Mikä on koppikseen vaikuttavan keskipakoisvoiman ja

   (c) coriolisvoiman suuruus?

5. Viereisessä kuvassa oleva M-massainen ja R-säteinen ympyräsylinteri pyörii vapaasti avaruudessa siten, että siihen ei vaikuta ulkoisia voimia. Sylinterin massakeskipisteeseen on piirretty sylinterin päähitausakselit $(1, 2, 3)$ joita vastaavat päähitausmomentit ovat $I_{C1} = I_{C2} = MR^2$ ja $I_{C3} = \frac{1}{2}MR^2$.

   (a) Kirjoita sylinterin Eulerin yhtälöt.

   (b) Ratkaise yhtälöistä sylinterin kulmanopeuden projektiot päähitausakseleilla.



Hyötytietoa: $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$,
$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_j} = 0$,
$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$, $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$, $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$, $\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$,
$L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j$, $T_{\mathrm{ROT}} = \frac{1}{2}\sum_{ij} \omega_i I_{ij} \omega_j$, $I_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \left[\delta_{ij} r^2 - r_i r_j\right]$,
$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = \tau_1$,
$T = \frac{1}{2}\sum_{ij} T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$, $U = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j$