FYSA210 Mekaniikka Tentti 29. 4. 2011

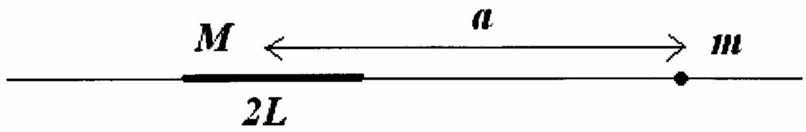
Tentissä on viisi samanarvoista tehtävää.

1) a) Laske voimakentän

$$\vec{F} = y^2\hat{\imath} + (2xy + z^2)\hat{\jmath} + (2yz + 2)\hat{k}$$

tekemä työ sen siirtäessä kappaleen pisteestä (2,0,0) pisteeseen (2,1,3) pitkin suoraa, jolla $x = 2$ ja $z = 3y$. **b)** Osoita, että a)-kohdan voimakenttä on konservatiivinen koko 3-ulotteisessa avaruudessa. **c)** Osoita, että myös pistemäisen kappaleen synnyttämä painovoimakenttä on konservatiivinen koko 3-ulotteisessa avaruudessa.

2) Massa M on jakautunut tasaisesti viivalle, jonka pituus = $2L$. Testikappale, jonka massa on = m, on etäisyydellä a viivan keskipisteestä ja sijaitsee samalla suoralla (kuva). Määritä voima, jolla viiva vetää kappaletta puoleensa. Lähestyykö laskemasi voima oikeaa raja-arvoa, kun a kasvaa rajatta?



3) Johda matemaattisen heilurin (massa m, pituus l) liikeyhtälö Lagrangen menetelmällä käyttäen napakoordinaatteja (r,ϕ) ja sidosehtoa $g(r,\phi)$. Totea, että näin saat myös pakkovoiman.

4) a) Osoita, että kaksihiukkasjärjestelmässä kokonaisliikemäärämomentti $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$ voidaan kirjoittaa muodossa $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{MKP} + \boldsymbol{L}'$, missä $\boldsymbol{L}_{MKP} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P} = M\dot{\boldsymbol{R}}$, $M = m_1 + m_2$, on järjestelmän massakeskipisteen liikemäärämomentti laboratoriokoordinaatistossa ja $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p} = \mu\dot{\boldsymbol{r}}$, on järjestelmän liikemäärämomentti mkp-koordinaatistossa. Tässä $\boldsymbol{R}$ on massakeskipisteen paikkavektori ja $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ on hiukkasten suhteellinen etäisyys. Edelleen $\mu = m_1 m_2/M$. **b)** Osoita, että kaksihiukkasjärjestelmän liike-energia $T = T_1 + T_2$ voidaan lausua muodossa $T = T_{MKP} + T'$, missä $T_{MKP} = ½M\dot{\boldsymbol{R}}^2$ on massakeskipisteen liike-energia laboratoriokoordinaatistossa ja $T' = ½\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2$ on järjestelmän liike-energia mkp-koordinaatistossa.

5) Henkilö saattaa puhallusputkella herneen matkalle suoraan ylöspäin 2,00 m korkeudelta Maan pinnasta paikassa, jonka leveysaste on 62° (Päiväntasaajan pohjoispuolella). Herne kohoaa 5,00 m korkeuteen. Herneen ollessa ilmassa henkilö astuu syrjään tarkkailemaan herneen lentoa. Missä kohdassa herne putoaa maahan?

Muistin tueksi:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \sum_k \lambda_k \frac{\partial q_k}{\partial q_j} = 0 \qquad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$