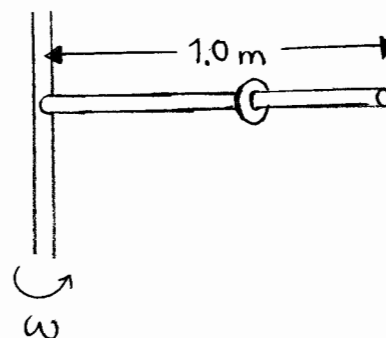


1. Oheisessa kuvassa on hyvin kevyt tanko, jonka pituus on 1.0 m ja joka pääsee pyörimään kitkatta pystysuoraan asetetun akselin ympäri. Tankoa pitkin liikuu kitkatta pieni rengas. Alussa sekä tanko, että rengas ovat levossa. Hetkellä $t = 0$ tanko alkaa pyöriä vakiokulmanopeudella 2.0 kierrosta sekunnissa. Määritä renkaan saama kiihtyvyys pyörimisakselista mitatun etäisyyden x funktiona käyttäen Lagrangen liikeyhtälöitä. Mikä on kiihtyvyyden arvo renkaan jättäessä tangon?



2. Tarkastellaan tehtävän 1 tanko-renkas-systeemiä, mutta muuutetaan alkuehtoa siten, että alussa sekä tanko, että rengas ovat levossa ja rengas on 50 cm:n päässä pyörimisakselista. Nyt tanko tönäistään liikkeelle siten että tanko saa kierrosnopeuden 2.0 kierrosta sekunnissa. Tällöin rengas alkaa liukua pitkin tankoa siten että systeemin pyörimismäärä L säilyy. Määritä nyt renkaan saama kiihtyvyys pyörimisakselista mitatun etäisyyden x funktiona käyttäen Lagrangen liikeyhtälöitä sekä sidosehtoa $L = \text{vakio}$. Mikä on kiihtyvyyden arvo renkaan jättäessä tangon?
3. Tarkastellaan m -massaisen vapaan hiukkasen liikettä pitkin x -akselia. Kirjoita hiukkasen Hamiltonin liikeyhtälöt sekä ratkaise ne.
4. Oletetaan, että maapallo on homogeeninen pallo, jonka säde on $R = 6365 \text{ km}$, massa on $M = 5.977 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ja pyörimisnopeus akselinsa ympäri $\omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$. Painovoimavakion arvo on $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

- (a) Mikä on painovoiman aiheuttama putoamiskiihtyvyys maan pinnan läheisyydessä?
- (b) Mikä on 1.0 kg:n massaiseen punnukseen vaikuttavan keskipakoisvoiman suuruus maan pinnalla leveysasteella 60° ?

5. Erään M -massaisen kappaleen xyz -koordinaatistossa kirjoitettu hitausmomenttitenso on

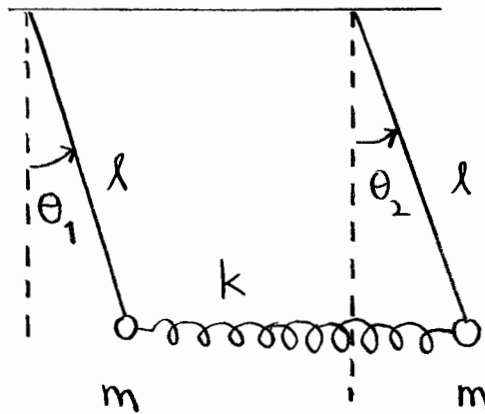
$$\mathbf{I} = MA \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

missä A on vakio.

- (a) Ratkaise kappaleen päähitausmomentit.
- (b) Kirjoita päähitausakselien lausekkeet ja piirrä ne xyz -koordinaatistoon.

6. Alla olevassa kuvassa kaksi samanlaista matemaattista heiluria on kytketty toisiinsa harmonisella jousella, jonka jousivakio on k . Heilurien pituudet ovat l ja heiluripainojen massat m . Jousi on lepopituudessaan, kun kuvan kulmat $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Heilurisysteemi suorittaa pieniä heilahteluja.

- Kirjoita systeemin potentiaalienergiaa ja liike-energiaa vastaavat matriisit \mathcal{U} ja \mathcal{T} .
- Määritä systeemin ominaistajuuudet.
- Millaisia heilahteluja ominaistajuuudet vastaavat?



Hyötytietoa: $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_j} = 0,$$

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L, \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j$$