FYSA220 Sähköoppi **Tentti 8. 6. 2012**

Laske 6 tehtävää seitsemästä:

1. Origossa olevan tasaisesti varautuneen varauspallon varaustiheys on 1 µC/m^3. Pallon säde on 5 cm ja siinä on varaukseton pyöreä onkalo, jonka keskipiste on pisteessä ($x = 2$ cm, $y = 0$ cm, $z = 0$ cm). Tämän onkalon säde on 2 cm. Laske sähkökenttä x-akselilla 10 cm etäisyydellä origosta. (8 p)

2. Eristepallon, jonka säde on R ja suhteellinen permittiivisyys ε, keskipisteessä on pistevaraus q. Laske $\vec{E}$-, $\vec{D}$- ja $\vec{P}$-kentät kaikkialla. (8 p)

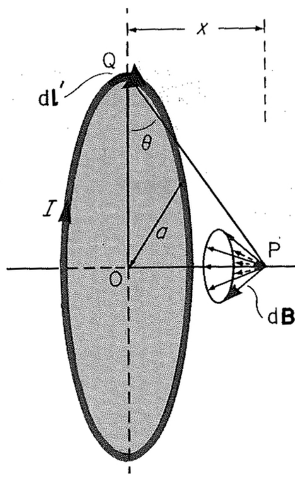
3. Osoita Biot-Savartin lauseesta

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

lähtien, että yhden virtasilmukan tuottama magneettikenttä B silmukan keskiakselilla on

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}},$$

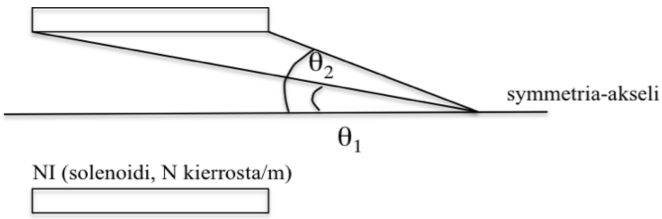
missä x on etäisyys silmukasta (keskiakselilla) ja a on silmukan säde. (8 p)



4. Edellisen tehtävän tulos voidaan laajentaa koskemaan solenoidia. Johda ko. lausekkeen avulla solenoidin keskiakselilla magneettikentälle B tulos:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

(katso kuva), missä N on solenoidin kierrosten lukumäärä/m. (8 p)



5. Sylinteri, jonka säde on 10 cm ja pituus 30 cm on tasaisesti magnetoitunut sylinterin pituusakselin suuntaan. Magnetoituman suuruus on $M = 100$ A/m. Mitoita sellainen solenoidi, joka on saman kokoinen kuin magnetoitunut sylinteri, ja jonka tuottama magneettikenttä sen sisällä on sama kuin kenttä magnetoituneen sylinterin sisällä. Laske solenoidin tuottama kenttä sen keskiakselilla puolessavälissä solenoidia ja keskiakselilla solenoidin päässä. (8 p)

6. Sähkömagneettisen aallon sähkö- ja magneettikentät tyhjiössä ovat

$$\vec{E} = (3\hat{\mathbf{e}}_x + 4\hat{\mathbf{e}}_y)\cos(\omega t - kz) \quad \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$\vec{B} = \left(-\frac{4k}{\omega}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{3k}{\omega}\hat{\mathbf{e}}_y\right)\cos(\omega t - kz) \quad [\mathrm{T}]$$

Osoita, että kentät toteuttavat kaikki Maxwellin yhtälöt tyhjiössä. (8 p)

7. Vastaa/selitä seuraavat:

a) Mitä tarkoittaa/tulkitaan sähköopissa esitys $\nabla \cdot \vec{F} = 0$. Anna esimerkki. (2 p)
b) Mitä tarkoittaa skin-efekti? (2 p)
c) Mikä on Poyntingin vektorin fysikaalinen tulkinta? (2 p)
d) Selitä kentänmuutosvirtatiheys ja sen merkitys. (2 p)

From: physics.nis

Fundamental Physical Constants — Frequently used constants

Quantity	Symbol	Value	Unit	Relative std. uncert. u_r
speed of light in vacuum	c, c_0	299 792 458	m s^{-1}	(exact)
magnetic constant	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	N A^{-2}	
		$= 12.566\,370\,614... \times 10^{-7}$	N A^{-2}	(exact)
electric constant $1/\mu_0 c^2$	ε_0	$8.854\,187\,817... \times 10^{-12}$	F m^{-1}	(exact)
Newtonian constant of gravitation	G	$6.673(10) \times 10^{-11}$	m^3 kg^{-1} s^{-2}	1.5×10^{-3}
Planck constant	h	$6.626\,068\,76(52) \times 10^{-34}$	J s	7.8×10^{-8}
$h/2\pi$	$\hbar$	$1.054\,571\,596(82) \times 10^{-34}$	J s	7.8×10^{-8}
elementary charge	e	$1.602\,176\,462(63) \times 10^{-19}$	C	3.9×10^{-8}
magnetic flux quantum $h/2e$	Φ_0	$2.067\,833\,636(81) \times 10^{-15}$	Wb	3.9×10^{-8}
conductance quantum $2e^2/h$	G_0	$7.748\,091\,696(28) \times 10^{-5}$	S	3.7×10^{-9}
electron mass	m_e	$9.109\,381\,88(72) \times 10^{-31}$	kg	7.9×10^{-8}
proton mass	m_p	$1.672\,621\,58(13) \times 10^{-27}$	kg	7.9×10^{-8}
proton-electron mass ratio	m_p/m_e	1 836.152 6675(39)		2.1×10^{-9}
fine-structure constant $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	α	$7.297\,352\,533(27) \times 10^{-3}$		3.7×10^{-9}
inverse fine-structure constant	α^{-1}	137.035 999 76(50)		3.7×10^{-9}
Rydberg constant $\alpha^2 m_e c/2h$	R_∞	10 973 731.568 549(83)	m^{-1}	7.6×10^{-12}
Avogadro constant	N_A, L	$6.022\,141\,99(47) \times 10^{23}$	mol^{-1}	7.9×10^{-8}
Faraday constant $N_A e$	F	96 485.3415(39)	C mol^{-1}	4.0×10^{-8}
molar gas constant	R	8.314 472(15)	J mol^{-1} K^{-1}	1.7×10^{-6}
Boltzmann constant R/N_A	k	$1.380\,6503(24) \times 10^{-23}$	J K^{-1}	1.7×10^{-6}
Stefan-Boltzmann constant $(\pi^2/60)k^4/\hbar^3c^2$	σ	$5.670\,400(40) \times 10^{-8}$	W m^{-2} K^{-4}	7.0×10^{-6}
	Non-SI units accepted for use with the SI			
electron volt: (e/C) J	eV	$1.602\,176\,462(63) \times 10^{-19}$	J	3.9×10^{-8}
(unified) atomic mass unit $1\,\mathrm{u} = m_u = \frac{1}{12}m(^{12}\mathrm{C}) = 10^{-3}$ kg mol$^{-1}/N_A$	u	$1.660\,538\,73(13) \times 10^{-27}$	kg	7.9×10^{-8}

VECTOR IDENTITIES[4]

Notation: f, g, are scalars; A, B, etc., are vectors; T is a tensor; I is the unit dyad.

(1) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{A} = \mathbf{B}\times\mathbf{C}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{C}\times\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

(2) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{C}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$

(3) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) + \mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = 0$

(4) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$

(5) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{D}$

(6) $\nabla(fg) = \nabla(gf) = f\nabla g + g\nabla f$

(7) $\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = f\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla f$

(8) $\nabla\times(f\mathbf{A}) = f\nabla\times\mathbf{A} + \nabla f\times\mathbf{A}$

(9) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}$

(10) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$

(11) $\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) = (\nabla\mathbf{B})\cdot\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$

(12) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$

(13) $\nabla^2 f = \nabla\cdot\nabla f$

(14) $\nabla^2\mathbf{A} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla\times\nabla\times\mathbf{A}$

(15) $\nabla\times\nabla f = 0$

(16) $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A} = 0$

If $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ are orthonormal unit vectors, a second-order tensor T can be written in the dyadic form

(17) $T = \sum_{i,j} T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$

In cartesian coordinates the divergence of a tensor is a vector with components

(18) $(\nabla\cdot T)_i = \sum_j(\partial T_{ji}/\partial x_j)$

[This definition is required for consistency with Eq. (29)]. In general

(19) $\nabla\cdot(\mathbf{AB}) = (\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$

(20) $\nabla\cdot(fT) = \nabla f\cdot T + f\nabla\cdot T$