FYSA233, Kvanttimekaniikka I, osa A, tentti2 **22.11.2013**

Loppukokeen yhteispistemäärä on 48 pistettä. Kaavakokoelma lopussa.

1. (a) Selitä mitä tarkoittaa aaltofunktion romahtaminen. [3 pt]

(b) Osoita, että itse-adjungoidun operaattorin ominaisarvot ovat reaalisia. [3 pt]

(c) Normita yksiulotteisen harmonisen värähtelijän perustilan aaltofunktio $\psi_0(x) = A\exp(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2)$ [3 pt]

(d) Selitä mitä tarkoittaa Heisenbergin epätarkkuusperiaate (tunnetaan myös nimellä epämääräisyysperiaate). [3 pt]

yht. 12 pt

2. (a) Olkoon kvanttimekaanisen 1-ulotteisen systeemin potentiaali ajasta riippumaton eli Hamiltonin operaattori on muotoa

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x).$$

Tee muuttujan separointi aaltomekaniikan Schrödinger yhtälöön, johda stationäärinen Schrödingerin yhtälö $\hat{H}\psi_E(x) = E\psi_E(x)$ tälle systeemille ja ratkaise myös aikariippuva osa. Kirjoita lopuksi Schrödingerin yhtälön yleisen ajasta riippuvan ratkaisun muoto stationääristen tilojen aaltofunktioiden muodostamassa kannassa. [4 pt]

(b) Lähtien observaabelin odotusarvon määritelmästä $\langle A\rangle \equiv \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$ ja käyttäen Diracin merkintää (menemättä x-esitykseen) osoita, että observaabelin A odotusarvon aikariippuvuudelle saadaan tulos

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle + \frac{i}{\hbar}\left\langle[\hat{H},\hat{A}]\right\rangle.$$

[4 pt]

(c) Osoita edellä johdettua Heisenbergin liikeyhtälöä käyttäen, että a-kohdassa annetun Hamiltonin operaattorin kuvaamalle systeemille pätee ns. Ehrenfestin teoreema eli

$$\frac{d\langle x(t)\rangle}{dt} = \frac{\langle p(t)\rangle}{m},$$
$$\frac{d\langle p(t)\rangle}{dt} = -\left\langle\frac{dV(x)}{dx}\right\rangle,$$

missä voit käyttää apuna tulosta $[\hat{p},\hat{V}] = -i\hbar\frac{dV(x)}{dx}\Big|_{\hat{x}}$. [4 pt]

yht. 12 pt

3. (a) Tarkastellaan kvanttimekaanisen hiukkasen yksiulotteista liikettä ja siroamista origoon sijoitetusta delta-potentiaalista $V(x) = \frac{\hbar^2}{m}\Omega\delta(x)$. Hiukkasen aaltofunktio on

$$\psi(x) = \begin{cases} A\exp(ikx) + B\exp(-ikx), & x < 0 \\ C\exp(ikx), & x \geq 0 \end{cases}.$$

Millaista liikettä edellä kirjoitettu aaltofunktion kuvaa? [2 pt]

(b) Muodosta stationaarinen Schrödingerin yhtälö ja osoita että aaltofunktion derivaatan epäjatkuvuus origossa on

$$\psi'(0_+) - \psi'(0_-) = 2\Omega\psi(0)$$

[5 pt]

(c) Vaikka aaltofunktion derivaatta on epäjatkuva origossa, aaltofunktio on jatkuva kaikkialla. Käytä näitä tietoja ja osoita että heijastus- ja läpäisykertoimille saadaan

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\Omega^2}{k^2 + \Omega^2}$$

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{k^2}{k^2 + \Omega^2}$$

[5 pt]

yht. 12 pt

4. Tarkastellaan 2-tilasysteemiä, jonka muodostavat ortonormaalit tilavektorit $|1\rangle$ ja $|2\rangle$ joita vastaavat energian ominaisarvot ovat E_1 ja E_2. On siis

$$\hat{H}|1\rangle = E_1|1\rangle\,,$$

$$\hat{H}|2\rangle = E_2|2\rangle\,.$$

Olkoon olemassa myös observaabeli A, jota vastaava operaattori $\hat{A}$ operoi kyseisessä kannassa seuraavasti

$$\hat{A}|1\rangle = +\imath\hbar|2\rangle\,,$$

$$\hat{A}|2\rangle = -\imath\hbar|1\rangle\,.$$

Tiedämme että systeemi on hetkellä $t = 0$ tilassa

$$|\psi(0)\rangle = \frac{3}{5}|1\rangle + \frac{4}{5}|2\rangle$$

Annetaan systeemin kehittyä hetkeen $t = t_1 > 0$.

(a) Mitkä ovat A:n ja energian mahdolliset ominaisarvot ajanhetkellä $t = t_1$? [4 pt]

(b) Millä todennäköisyydellä mittaus antaa A:n eri ominaisarvot ajanhetkellä $t = t_1$? [4 pt]

(c) Onko A liikevakio ? Perustele (laske!) [4 pt]

Muista että

$$|\psi(t)\rangle = \sum_N c_N e^{-\imath E_N(t-t_0)/\hbar}|E_N\rangle\,.$$

yht. 12 pt