

tentti: 4 tehtävää, 4 tuntia

1. Tarkastellaan kvanttimekaanista kaksitilasysteemiä. Eräällä systeemin observaabelilla A on ominaistilat $|+\rangle$ ja $|-\rangle$, joille pätee

$$A|+\rangle = |+\rangle, \quad A|-\rangle = -|-\rangle.$$

Systeemin Hamiltonin operaattorille puolestaan pätee

$$H|+\rangle = E|+\rangle + i\delta|-\rangle, \quad H|-\rangle = -i\delta|+\rangle + E|-\rangle.$$

missä E ja δ ovat reaalilukuja.

- (a) (2p.) Kirjoita operaattoria A ja H esittävät matriisit ominaistilojen $|+\rangle$ ja $|-\rangle$ muodostamassa kannassa.
 - (b) (2p.) Olkoon systeemi tilassa $|+\rangle$. Jos tästä tilasta mitataan energia, niin mitkä ovat mahdolliset mittaustulokset ja niiden havaitsemiseen liittyvät todennäköisyydet?
 - (c) (2p.) Merkitään energian ominaisarvoja ϵ_+ ja ϵ_- ($\epsilon_+ > \epsilon_-$), sekä niihin liittyviä ominaistiloja $|\epsilon_+\rangle$ ja $|\epsilon_-\rangle$. Jos (b)-kohdassa energian mittaus antoi tuloksen ϵ_+ , niin mikä on systeemiä kuvaava tilavektori välittömästi mittauksen jälkeen? Jos nyt mitataan A niin mitä arvoja voidaan saada, ja millä todennäköisyyksillä?
2. Tarkastellaan kvanttimekaanista symmetristä kaksoiskuoppaa, jolla on kaksi ortonormitettua sidottua tilaa, parillinen ja pariton ($|E\rangle$ ja $|O\rangle$). Olkoon tilojen energiat E_1 ja E_2 , eli

$$\begin{aligned} H|E\rangle &= E_1|E\rangle, \\ H|O\rangle &= E_2|O\rangle. \end{aligned}$$

- (a) (1p.) Olkoon järjestelmä hetkellä $t = 0$ tilassa

$$|\Psi(0)\rangle = \alpha|E\rangle + \beta|O\rangle,$$

missä $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Mikä on järjestelmän tila $|\Psi(t)\rangle$ hetkellä $t > 0$?

- (b) (3p.) Kun järjestelmä on tilassa $(|E\rangle + |O\rangle)/\sqrt{2}$, todennäköisyys löytää hiukkanen vasemmanpuoleisesta kuopasta on 1. Kun järjestelmän tila on $(|E\rangle - |O\rangle)/\sqrt{2}$, todennäköisyys löytää hiukkanen oikeanpuoleisesta kuopasta on 1. Olkoon järjestelmä preparoitu siten, että hetkellä $t = 0$ hiukkanen on varmasti vasemmanpuoleisessa kuopassa, eli $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$. Laske todennäköisyys, että hetkellä $t > 0$ hiukkanen löytyy oikeanpuoleisesta kuopasta. Kauanko kuluu siihen, että hiukkanen löydetään oikeanpuoleisesta kuopasta todennäköisyydellä 1?
- (c) (2p.) Oletetaan, että hiukkanen löytyi oikeanpuoleisesta kuopasta hetkellä t . Millä todennäköisyydellä hiukkanen tällöin löytyy vasemmanpuoleisesta kuopasta hetkellä $3t$, jos systeemistä ei tehdä mitään mittauksia hetkien t ja $3t$ välisenä aikana.

3. (a) (3p.) Olkoon H systeemin Hamiltonin operaattori, ja A jotakin observaabelia kuvaava operaattori. Johda Ehrenfestin teoreema

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle.$$

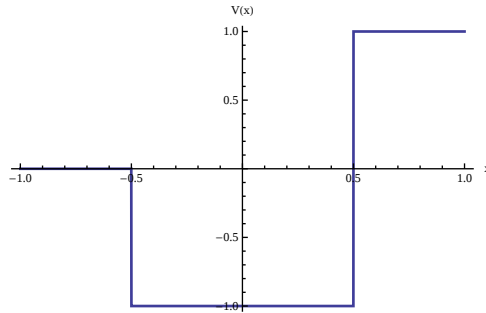
- (b) (3p.) Tarkastellaan potentiaalia

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < -L/2, \\ -V_0, & |x| < L/2, \\ V_0, & x > L/2. \end{cases}$$

Oheisessa kuvassa on valittu $V_0 = 1$ eV ja $L = 0.5$ nm. Sirontaratkaisut ja sidotut tilat toteuttavat ajasta riippumattoman Schrödingerin yhtälön,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

Kirjoita Schrödingerin yhtälön yleisin normittuva ratkaisu, kun $E < 0$ (mutta $E > -V_0$). Mitkä ehdot aaltofunktion ja sen derivaatan täytyy toteuttaa pisteissä $x = \pm L/2$?



4. Yksiulotteisen harmonisen oskillaattorin Hamiltonin operaattori on

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2.$$

Määritellään lasku- ja nosto-operaattorit

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} P, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} P.$$

- (a) (1p.) Johda kommutaatiorelaatio $[a, a^\dagger] = 1$.
 (b) (2p.) Tarkastellaan lukumääräoperaattorin $N = a^\dagger a$ ominaistiloja, joille pätee $N|n\rangle = n|n\rangle$. Näytä, että a laskee ja $a^\dagger$ nostaa ominaisarvoa yhdellä; siis

$$Na|n\rangle = (n-1)a|n\rangle, \quad Na^\dagger|n\rangle = (n+1)a^\dagger|n\rangle.$$

- (c) (1p.) Määää vakiot C ja C' siten, että tilat $|n-1\rangle = Ca|n\rangle$ ja $|n+1\rangle = C'a^\dagger|n\rangle$ ovat normitettuja.
 (d) (2p.) Laske operaattoreiden X ja X^2 odotusarvot tilassa $|n\rangle$.

Hyötytietoa:

$$\begin{aligned}
 e^{ix} &= \cos x + i \sin x & e^{i\pi} + 1 &= 0 \\
 \sin x &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) & \cos x &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \\
 \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x & \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
 \frac{1}{2} (1 - \cos x) &= \sin^2 \frac{x}{2} & \frac{1}{2} (1 + \cos x) &= \cos^2 \frac{x}{2} \\
 e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} & \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\
 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-cx^2} &= \sqrt{\frac{\pi}{c}} & \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-cx^2} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2c^{\frac{3}{2}}} \\
 \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) &= f(x_0) & \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) &= 1 \\
 \tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) & f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \tilde{f}(k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle &= H |\psi(t)\rangle \\
 U(t) &= e^{-iHt/\hbar} \\
 \Delta A &= \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} & \Delta A \Delta B &\geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \\
 \Delta x \Delta p &\geq \frac{\hbar}{2} & \Delta E \Delta t &\geq \frac{\hbar}{2} \\
 \frac{d\langle A \rangle}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle \\
 H &= \frac{P^2}{2m} + V(x) & [X, P] &= i\hbar \\
 \psi(x) &= \langle x | \psi \rangle & X &= x & P &= -i\hbar \frac{d}{dx} \\
 H &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \\
 i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t) \\
 -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) &= E \psi(x) \\
 \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad \hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad q_e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$