

tentti: 4 tehtävää, 4 tuntia

1. Tarkastellaan pyörimismääräoperaattoria \vec{J} , jonka komponentit toteuttavat kommutaatiorelaatiot

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x, \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y.$$

- (a) (2p.) Pyörimismäärän neliö on

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2.$$

Osoita, että jokainen \vec{J} :n komponentti kommutoi J^2 :n kanssa.

- (b) (2p.) Määritellään operaattorit

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y.$$

Osoita, että

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm\hbar J_{\pm}, \quad [J^2, J_{\pm}] = 0$$

ja

$$J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z, \quad J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z.$$

- (c) (2p.) (a)-kohdan tuloksen perusteella J^2 :lla ja yhdellä \vec{J} :n komponentilla – olkoon tämä komponentti J_z – on yhteiset ominaistilat. Merkitään ominaistiloja $|jm\rangle$ ja oletetaan, että niille pätee

$$J^2 |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle, \quad J_z |jm\rangle = m\hbar |jm\rangle.$$

Osoita, että J_+ nostaa ja J_- laskee J_z :n ominaisarvoa \hbar :n verran. Osoita myös, että J_+ ja J_- eivät muuta J^2 :n ominaisarvoa. Toisin sanoen osoita, että

$$J_z J_{\pm} |jm\rangle = (m \pm 1)\hbar J_{\pm} |jm\rangle, \quad J^2 J_{\pm} |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 J_{\pm} |jm\rangle.$$

2. (a) (3p.) Pallosymmetrisessä potentiaalissa $V(r)$ liikkuvan hiukkasen aaltofunktio toteuttaa Schrödingerin yhtälön

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi_{n\ell m}}{\partial r} \right) + \frac{1}{2mr^2} L^2 \psi_{n\ell m} + V(r) \psi_{n\ell m} = E \psi_{n\ell m},$$

missä L^2 on vain kulmista riippuva operaattori. Johda tästä sijoitusten $\psi_{n\ell m}(\vec{r}) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ ja $R_{n\ell}(r) = u_{n\ell}(r)/r$ kautta radiaaliselle aaltofunktiolle $u_{n\ell}(r)$ yhtälö

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_{n\ell}(r)}{dr^2} + \left(\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} + V(r) \right) u_{n\ell}(r) = E u_{n\ell}(r). \quad (1)$$

Muista, että palloharmoniset funktiot $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ ovat operaattorin L^2 ominaisfunktioita ominaisarvolla $\hbar^2 \ell(\ell+1)$.

- (b) (3p.) Oletetaan, että $V(r) \rightarrow 0$ kun $r \rightarrow \infty$, ja että pienillä r :n arvoilla $V(r)$ kasvaa äärettömäksi hitaammin kuin $1/r^2$. Ratkaise yhtälöstä (1) funktion $u_{n\ell}(r)$ asympotoottinen muoto suurilla ja pienillä r :n arvoilla.

3. Tarkastellaan spin-1 -hiukkasen (hiukkanen 1) ja spin-1/2 -hiukkasen (hiukkanen 2) muodostamaa systeemiä.
- (a) (2p.) Kirjoita kaikki kytketyn kannan tilat kytkemättömien tilojen avulla. (Clebsch–Gordan -kertoimet saa katsoa taulukosta.)
- (b) (2p.) Olkoon systeemin Hamiltonin operaattori

$$H = \frac{E_0}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2,$$

missä E_0 on vakio, ja \vec{S}_1 ja \vec{S}_2 ovat hiukkasten 1 ja 2 spinoperaattorit. Mitä tuloksia on mahdollista saada, jos systeemin energia mitataan?

- (c) (2p.) Oletetaan, että kummankin hiukkasen spin on mitattu z -akselin suunnassa, ja saatu tulos $+\hbar$ hiukkaselle 1 ja $+\hbar/2$ hiukkaselle 2. Jos systeemin energia mitataan välittömästi tämän mittauksen jälkeen, mitkä ovat eri energian arvoihin liittyvät todennäköisyydet?
4. Tarkastellaan Hamiltonin operaattoria

$$H = H_0 + H_1$$

missä

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad H_1 = \begin{pmatrix} 0 & ia \\ -ia & 0 \end{pmatrix},$$

ja häiriö $|a| \ll |E_1 - E_2|$. Ominaisenergioita E_1 ja E_2 vastaavat häiritsemättömän järjestelmän ominaistilat

$$|1\rangle^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |2\rangle^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (2p.) Oletetaan $E_1 \neq E_2$, eli järjestelmällä on kaksi degeneroitumatonta ominaisenergiaa. Laske häiriöteoriaa käyttäen ensimmäisen ja toisen kertaluvun korjaukset energioihin E_1 ja E_2 .
- (b) (2p.) Olkoon sitten $E_1 = E_2$. Laske häiriöteoreettiset ensimmäisen kertaluvun energiakorjaukset tässä tapauksessa.
- (c) (2p.) Ratkaise Hamiltonin operaattorin $H = H_0 + H_1$ ominaisarvot eksaktisti ja vertaa edellisissä kohdissa laskemiisi tuloksiin. Kehitelmästä $\sqrt{1+x^2} \approx 1 + x^2/2 + \dots$ saattaa olla apua vertailussa.

Hyötytietoa:

$$\begin{aligned}
 e^{ix} &= \cos x + i \sin x & e^{i\pi} + 1 &= 0 \\
 \sin x &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) & \cos x &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \\
 \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x & \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
 \frac{1}{2} (1 - \cos x) &= \sin^2 \frac{x}{2} & \frac{1}{2} (1 + \cos x) &= \cos^2 \frac{x}{2} \\
 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} (x - x_0)^n & e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
 \int_0^{\infty} dx x^n e^{-cx} &= \frac{n!}{c^{n+1}} & \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-cx^2} &= \sqrt{\frac{\pi}{c}} \\
 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-cx^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{c^3}} & \int_{-\infty}^{\infty} dx x^4 e^{-cx^2} &= \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{c^5}} \\
 \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) &= f(x_0) & \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) &= 1 \\
 \tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) & f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \tilde{f}(k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle &= H |\psi(t)\rangle \\
 U(t) &= e^{-iHt/\hbar} \\
 \Delta A &= \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} & \Delta A \Delta B &\geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \\
 \Delta x \Delta p &\geq \frac{\hbar}{2} & \Delta E \Delta t &\geq \frac{\hbar}{2} \\
 \frac{d\langle A \rangle}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle \\
 H &= \frac{P^2}{2m} + V(x) & [X, P] &= i\hbar \\
 \psi(x) &= \langle x | \psi \rangle & X = x & \quad P = -i\hbar \frac{d}{dx} \\
 H &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \\
 i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t) \\
 -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} &+ V(x) \psi(x) = E \psi(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c &= 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s} & \hbar &= 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js} & q_e &= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\
 \epsilon_0 &= 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} & \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} & m_e &= 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(t) &= e^{-iHt/\hbar} & T(\vec{a}) &= e^{-i\vec{P}\cdot\vec{a}/\hbar} & R_{\vec{n}}(\theta) &= e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}/\hbar} \\
[J_x, J_y] &= i\hbar J_z & [J_y, J_z] &= i\hbar J_x & [J_z, J_x] &= i\hbar J_y \\
J^2 &= J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 & J_{\pm} &= J_x \pm iJ_y \\
[J_z, J^2] &= 0 & [J_z, J_{\pm}] &= \pm\hbar J_{\pm} & [J_+, J_-] &= 2\hbar J_z \\
J^2|jm\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|jm\rangle & J_z|jm\rangle &= m\hbar|jm\rangle \\
J_{\pm}|jm\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|j, m\pm 1\rangle \\
\vec{S} &= \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} & \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i &= 2i \sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k & \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i &= 2\delta_{ij} \\
H &= -\vec{\mu} \cdot \vec{B} & \vec{\mu} &= \gamma\vec{S} = g\frac{q}{2m}\vec{S} & g_e &\simeq 2 \\
|j_1j_2, jm\rangle &= \sum_{m_1, m_2} \langle j_1m_1, j_2m_2|jm\rangle |j_1m_1\rangle |j_2m_2\rangle \\
E_n^{(1)} &= \langle \psi_n^{(0)}|V|\psi_n^{(0)}\rangle \\
E_n^{(2)} &= \sum_{m\neq q} \frac{|\langle \psi_m^{(0)}|V|\psi_n^{(0)}\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} & |\psi_n^{(1)}\rangle &= \sum_{m\neq q} \frac{\langle \psi_m^{(0)}|V|\psi_n^{(0)}\rangle^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\psi_m^{(0)}\rangle
\end{aligned}$$

Spin-1 -hiukkasen spinoperaattorin komponentit:

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Harmoninen oskillaattori:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) \\
a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}P & a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}P \\
a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle & a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle & H|n\rangle &= \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle
\end{aligned}$$

Vetyatomi:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m} \quad E_0 = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{ eV}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{100}(r) &= \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \\
\psi_{200}(r) &= \frac{1}{\sqrt{32\pi a_0^3}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0} \\
\psi_{210}(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{32\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \cos \theta \\
\psi_{21\pm 1}(r, \theta, \phi) &= \mp \frac{1}{\sqrt{32\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \sin \theta e^{\pm i\phi}
\end{aligned}$$

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

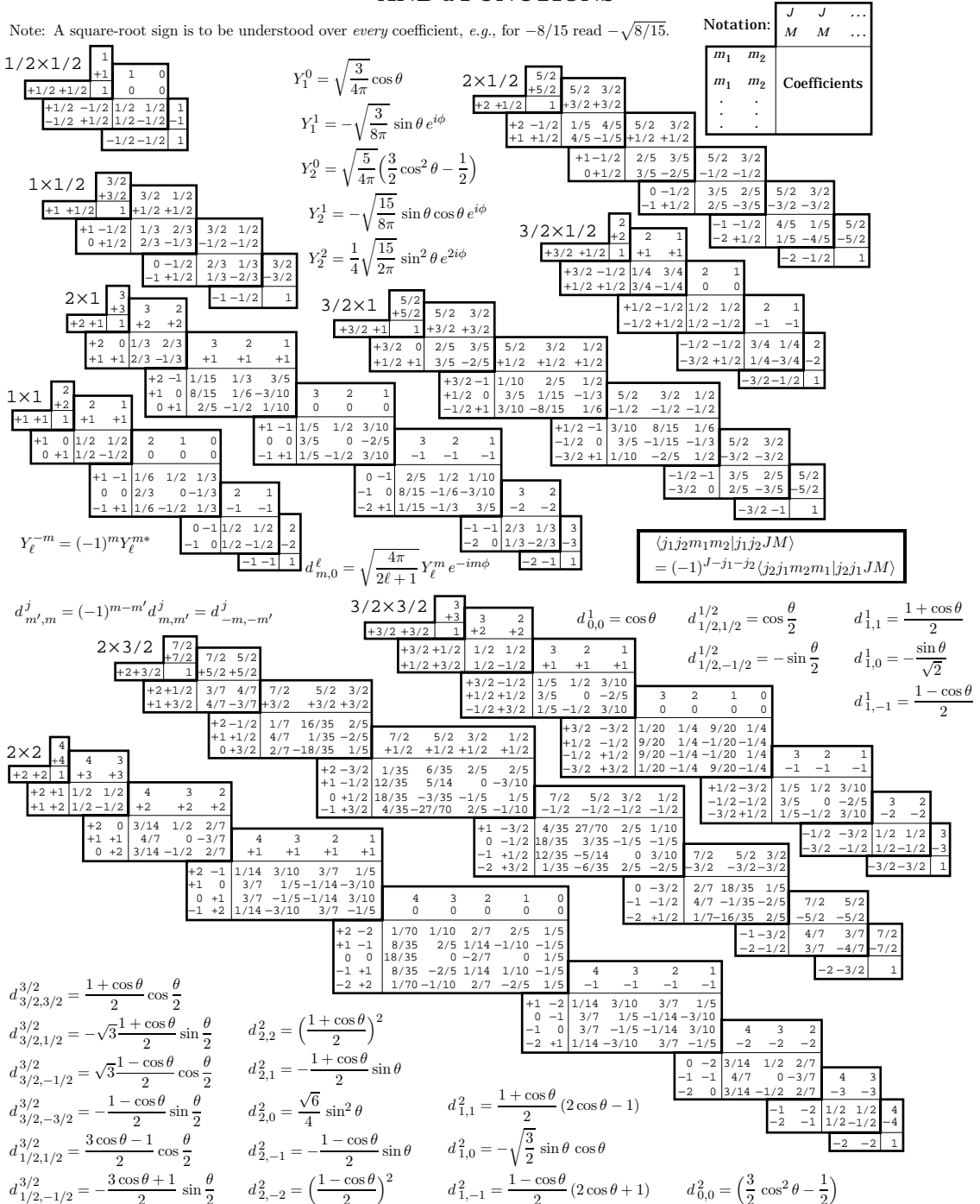


Figure 34.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.