Kvanttimekaniikka I A (FYSA231), Kevät 2010

Kuulustelu 1.

1. Selitä tai laske lyhyesti seuraavat asiat. (1 p per kohta)

   i) Miksi aaltofunktion pitää olla normittuva?
   ii) Olkoon $\psi(x)$ jotain tilaa vastaava aaltofunktio. Miten lasket operaattorin $\hat{A}$ odotusarvon tästä tilasta?
   iii) Mikä on kvanttimekaanisen liikevakion määritelmä?
   iv) Osoita, että $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.
   v) Heisenbergin epämääräisyysperiaate.
   vi) Miksi harmoninen värähtelijä on tärkeä fysikaalinen systeemi?

2. a) Lausu hermiittisen operaattorin perusmääritelmä. Miksi kvanttimekaniikan observaabeleita vastaavien operaattorien tulee olla hermiittisiä? (2 p)
   b) Laske $\frac{d}{dt}\langle A \rangle$. Oleta, että observabeelilla A ei ole eksplisiittistä aikariippuvuutta: $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$ ja näytä, että jos $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$, niin $\frac{d}{dt}\langle A \rangle = 0$. (4 p)

3. Olkoon $\hat{A}$ jotain observaabelia vastaava operaattori ja $\{\mid 1\rangle, \mid 2\rangle\}$ systeemin ortonormitettu kanta. Seuraavat pätee $\hat{A}$:lle

$$\begin{cases} \hat{A} \mid 1\rangle = \mid 2\rangle, \\ \hat{A} \mid 2\rangle = \mid 1\rangle. \end{cases}$$

   a) Määritä operaattorin $\hat{A}$ matriisiesitys, $\hat{A}$:n ominaisarvot ja normitetut ominaisvektorit. (4 p)
   b) Olkoon systeemi tilassa $\mid 1\rangle$. Mitkä ovat observaabeli A:n mahdolliset mittaustulokset ja millä todennäköisyydellä ne saavutettaan? (2 p)

4. a) Hiukkanen liikkuu yksiulotteisessa suorakulmaisessa äärettömän syvässä, välillä $x = -L$ ja $x = 0$ sijaitsevassa, potentiaalikuopassa. Ratkaise hiukkasen energian ominaisarvot ja niitä vastaavat normitetut aaltofunktiot. Annetaan: $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. (3 p)
   b) Piirrä kolmen ensimmäisen tilan aaltofunktion kuvaajat. (1 p)
   c) Ota ensimmäinen viritystila ja laske todennäköisyys, että hiukkanen on välillä $-\frac{3}{4}L \leq x \leq -\frac{1}{4}L$. (2 p)

Quantum mechanics I A (FYSA231), Spring 2010

Exam 1.

1. Explain or calculate shortly (1 p for each question)

   i) Why wave function must be normalizable?
   ii) Let $\psi(x)$ be wave function describing some state. How to calculate expectaion value for an operator $\hat{A}$.
   iii) What is the definiton of quantum mechanical constant of motion?
   iv) Show that $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.
   v) Heisenberg's uncertainty principle.
   vi) Why harmonic oscillator is important system in physics?

2. a) What is the definition of Hermitian operator? Why quantum mechanical operators that correspond observables must be Hermitian? (2 p)
   b) Calculate $\frac{d}{dt}\langle A\rangle$. Assume that observable A does not have explicit time dependence: $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$ and show that if $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$, then $\frac{d}{dt}\langle A\rangle = 0$. (4 p)

3. Let $\hat{A}$ be operator that corresponds to some observable and $\{\mid 1\rangle, \mid 2\rangle\}$ is orthonormalized basis set of the system. Following is true for $\hat{A}$

$$\begin{cases} \hat{A} \mid 1\rangle = \mid 2\rangle, \\ \hat{A} \mid 2\rangle = \mid 1\rangle. \end{cases}$$

   a) Define the matrix representation for operator $\hat{A}$ and eigenvalues and normalized eigenvectors. (4 p)
   b) Let the system be in state $\mid 1\rangle$. What are the possible measurement results for observable A and which probability one gets them. (2 p)

4. a) A particle moves in one-dimensional infinitely deep square potential well between $x = -L$ and $x = 0$. Solve the eigenvalues of the energy and corresponding normalized wave functions. Note: $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. (3 p)
   b) Draw the first three wave functions. (1 p)
   c) Take the wave function of the first excited state and calculate the probability that the particle is between $-\frac{3}{4}L \leq x \leq -\frac{1}{4}L$. (2 p)