FYSA230 Kvanttimekaniikka I, Osa A 26.11.2010

tentti: 4 tehtävää, 4 tuntia

---

1. Tarkastellaan kvanttimekaanista kaksitilasysteemiä. Merkitään energian ortonormaaleja ominaistiloja $|1\rangle$ ja $|2\rangle$, joita vastaavat ominaisenergiat ovat E_1 ja E_2. Energian lisäksi systeemiin liittyy observaabeli A jota kuvaava operaattori A toimii tiloille $|1\rangle$ ja $|2\rangle$ seuraavasti:

$$A|1\rangle = |2\rangle, \quad A|2\rangle = |1\rangle.$$

   (a) (3) Kirjoita operaattorin A matriisiesitys energian ominaistilojen kannassa, osoita että A:n ominaisarvot ovat ± 1 ja etsi A:n ominaisvektorit.

   (b) (1) Olkoon systeemi energian ominaistilassa $|1\rangle$. Jos tästä tilasta mitataan observaabelia A, niin mitkä ovat mahdolliset mittaustulokset ja mitkä ovat niihin liittyvät todennäköisyydet?

   (c) (2) Jos (b)-kohdassa A:n mittaus antoi tuloksen $+1$ niin mikä on systeemin tilavektori välittömästi tämän mittauksen jälkeen? Jos nyt mitataan energia, niin mitä arvoja voidaan saada tulokseksi ja millä todennäköisyyksillä?

2. Olkoon elektroni homogeenisessa magneettikenttässä $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{y}}$ ja tarkastellaan tilannetta kuvaavaa Hamiltonin operaattoria $H = -\vec{\mu}\cdot\mathbf{B}$, missä $\vec{\mu} = -g\mathbf{S}$ ja $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ on spinoperaattori s.e. S_z:n ominaiskannassa operaattoreilla S_i on matriisiesitykset $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ ($i = x, y, z$ ja σ_i on Paulin matriisi). Olkoon elektroni hetkellä $t = 0$ spinoperaattorin x-komponentin S_x ominaisarvoa $\hbar/2$ vastaavassa ominaistilassa.

   (a) (2) Millä todennäköisyydellä hetkellä t_1 suoritetussa spinin z-komponentin mittauksessa saadaan tulos $\hbar/2$?

   (b) (2) Mikä on systeemin tilavektori välittömästi kohdassa (a) suoritetun mittauksen jälkeen jos mittaus antoi tuloksen $\hbar/2$? Onko S_z liikevakio? Perustele vastauksesi.

   (c) (2) Jos (a)-kohdassa suoritetun mittauksen (jonka tulos siis oli $\hbar/2$) jälkeen odotetaan ajan T verran ja mitataan uudestaan spinin z-komponentti, niin millä todennäköisyydellä saadaan tulos $\hbar/2$? Millä T:n arvoilla saadaan mittauksessa tulos $\hbar/2$ täysin varmasti (siis todennäköisyydellä 1)?

3. (a) (3p) Osoita, että Hermiittisen operaattorin ominaisarvot ovat reaaliset ja ominaisvektorit ortogonaaliset. Mikä on tämän matemaattisen tuloksen merkitys kvanttimekaniikan kannalta?

   (b) (1p) Mitä tarkoitetaan lomittuneella tilalla?

   (c) (2p) Tarkastellaan tilavektoria

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2),$$

   missä vektorit $|\pm\rangle_i$ ($i = 1, 2$) ovat spin-1/2 hiukkaseen liittyvän operaatorin $S_z^{(i)}$ (ortogonaaliset) ominaistilat,

$$S_z^{(i)}|\pm\rangle_i = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle_i.$$

   Osoita, että $|\Phi\rangle$ on operaattorin $[S_z^{(1)} \otimes S_z^{(2)}]$ ominaistila. Mikä on vastaava ominaisarvo?

4. (a) (4) Tarkastellaan δ-funktiopotentiaalia $V(x) = -\alpha\delta(x)$, missä $\alpha > 0$. Ratkaise sidotut tilat $E < 0$. Etsi siis stationaarisen Schrödingerin yhtälön ratkaisut alueissa $x < 0$ ja $x > 0$, ja vaadi aaltofunktion jatkuvuus pisteessä $x = 0$. Huomaa, että nyt aaltofunktion derivaatta ei ole jatkuva, mutta epäjatkuvuuden voi määrätä stationaarisen Schrödingerin yhtälön avulla. Osoittautuu että sidottuja tiloja on tasan yksi. Mikä on ko. tilan energia ja vastaava normitettu ominaisfunktio?

(b) (2) Tilat $\{|E\rangle\}$ olkoot Hamiltonin operaattorin H ominaistilat. Tällöin jokainen tilavektori voidaan kirjoittaa näiden tilojen muodostamassa kannassa:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_E |E\rangle\langle E|\psi(t)\rangle.$$

Lähtien liikkeelle Schrödingerin yhtälöstä ratkaise kerrointen $\langle E|\psi(t)\rangle \equiv \psi_E(t)$ aikariippuvuus.

Hyötytietoa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-cx^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2c^{\frac{3}{2}}}$$

$$U(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right), \quad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos x) = \sin^2(2x), \quad \frac{1}{2}(1 + \cos x) = \cos^2(2x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

Fourier-muunnos:

$$\tilde{f}(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tilde{f}(\mathbf{p})$$

Sopivin oletuksin funktioille $f(\mathbf{x})$ ja $g(\mathbf{x})$ on voimassa:

$$\int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} f(\mathbf{x})\nabla^2 g(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} (\nabla^2 f(\mathbf{x}))g(\mathbf{x}).$$

Pallokoordinaatit:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta.$$

Paulin matriisit:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$