Kvanttimekaniikka I, osa B (FYSA232) Tentti 10.9.2010

1. Osoita, että pyörimismääräoperaattorin $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$ karteesiset komponentit toteuttavat kommutaatiorelaatiot

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \hat{L}_k \,. \tag{1}$$

2. Tarkastellaan yksiulotteista harmonista värähtelijää sähkökentässä. Värähtelijän hamiltonin operaattori on muotoa

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + qE_x x \,. \tag{2}$$

Laske tämän Hamiltonin operaattorin ominaistilojen aaltofunktiot sekä energian ominaisarvot (älä käytä nosto- ja laskuoperaattoreita).

3. Selitä lyhyesti ja ytimekkäästi mitä seuraavat termit tarkoittavat:

   (a) Keskeispotentiaali ja aaltofunktion separoituminen

   (b) Spinori

   (c) Palloharmoninen funktio

   (d) Clebsch-Gordan -kerroin

   (e) WKB-approksimaatio

   (f) Paulin kieltosääntö

4. Hiukkanen on yksiulotteisessa potentiaalikuopassa ja sen hamiltonin operaattori on muotoa

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \hbar\omega e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \tag{3}$$

Potentiaalia approksimoidaan sen Taylorin kehitelmän kolmella ensimmäisellä termillä, jolloin approksimatiivinen potentiaali on muotoa

$$V_0(x) = -\hbar\omega + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{4}$$

Nyt systeemin hamiltonin operaattori (5) voidaan lausua muodossa

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_1, \tag{5}$$

missä $\hat{H}_0 = \hat{p}^2/2m + V_0(x)$.

(a) Mitä ovat $\hat{H}_0$:n ominaistilat ja energian ominaisarvot?

(b) Mikä on häiriöpotentiaalin $\hat{V}_1$ muoto?

(c) Laske häiriöteorian ensimmäisen kertaluvun energiakorjaus perustilan energialle.

5. Kolme identtistä hiukkasta on potentiaalikuopassa. Hiukkassysteemin Hamiltonin operaattori on

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + V(x_1) + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + V(x_2) + \frac{\hat{p}_3^2}{2m} + V(x_3). \tag{6}$$

Yhden hiukkasen aaltofunktiot toteuttavat Schrödingerin yhtälön

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)\right)\psi_n(x) = \epsilon_n\psi_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

(a) Muodosta kolmen hiukkasen Slaterin determinantti, jossa yhden hiukkasen tilat ψ_1, ψ_3 ja ψ_4 on miehitetty.

(b) Osoita, että edellä muodostamasi Slaterin determinantti on Hamiltonin operaattorin (6) ominaistila.

(c) Mikä on Slaterin determinantin energian ominaisarvo?

Kaava- ja luonnonvakiokokoelma:

$$
\begin{aligned}
\hbar &= 1.05457266 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} \\
\hbar c &= 197.327053\,\mathrm{MeVfm} \\
m_e &= 9.1093897 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 510.99906\,\mathrm{keV/c^2} \\
\hat{a} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p} \\
\hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p} \\
[\hat{a},\hat{a}^\dagger] &= 1 \\
[\hat{x},\hat{p}] &= i\hbar \\
f(x) &= f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)_{x=x_0} \\
\vec{j} &= -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) \\
\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})\,. \\
\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle &= n|n\rangle\,. \\
\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(p)e^{ipx/\hbar}dp\,. \\
\int_{-\infty}^{\infty}|p\rangle\langle p|dp &= 1\,. \\
\langle x|1\rangle &= \psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\,. \\
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,. \\
\int_{-\infty}^{\infty} x^{2s}e^{-ax^2}dx &= \frac{(2s-1)!!}{2^s a^s}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,. \\
(2s-1)!! &= 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s-3)\cdot(2s-1)\,. \\
\Psi_{nm}(x_1,x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2!}}\begin{vmatrix}\psi_n(x_1) & \psi_m(x_1)\\ \psi_n(x_2) & \psi_m(x_2)\end{vmatrix}\,.
\end{aligned}
$$