

tentti: 4 tehtävää, 4 tuntia

1. (a) (3p.) Systeemin infinitesimaalista kiertoa kulman ϵ verran z -akselin ympäri esittää operaattori

$$R_z(\epsilon) = 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} J_z.$$

Johda tämän avulla äärellistä kiertoa kulman θ verran esittävän operaattorin lauseke. Voit olettaa tunnetuksi, että

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = e^x.$$

- (b) (3p.) Tarkastellaan operaattoria $T(a) = e^{-iPa/\hbar}$. Osoita sarjakehitelmän avulla, että $T(a)$:n operointi aaltofunktioon $\psi(x)$ antaa

$$T(a)\psi(x) = \psi(x - a).$$

Miksi tämä tulos osoittaa, että $T(a)$ esittää systeemin siirtoa a :n verran oikealle?

2. Tarkastellaan pyörimismääräoperaattoria \vec{J} , jonka komponentit toteuttavat kommutaatiorelaatiot

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x, \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y.$$

- (a) (2p.) Pyörimismäärän neliö on

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2.$$

Osoita, että jokainen \vec{J} :n komponentti kommutoi J^2 :n kanssa.

- (b) (2p.) Määritellään operaattorit

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y.$$

Osoita, että

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm\hbar J_{\pm}, \quad [J^2, J_{\pm}] = 0$$

ja

$$J_+ J_- = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z, \quad J_- J_+ = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z.$$

- (c) (2p.) (a)-kohdan tuloksen perusteella J^2 :lla ja yhdellä \vec{J} :n komponentilla – olkoon tämä komponentti J_z – on yhteiset ominaistilat. Merkitään ominaistiloja $|jm\rangle$ ja oletetaan, että niille pätee

$$J^2 |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle, \quad J_z |jm\rangle = m\hbar |jm\rangle.$$

Osoita, että J_+ nostaa ja J_- laskee J_z :n ominaisarvoa \hbar :n verran. Osoita myös, että J_+ ja J_- eivät muuta J^2 :n ominaisarvoa. Toisin sanoen osoita, että

$$J_z J_{\pm} |jm\rangle = (m \pm 1)\hbar J_{\pm} |jm\rangle, \quad J^2 J_{\pm} |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 J_{\pm} |jm\rangle.$$

3. Tarkastellaan spin-1 -hiukkasen (hiukkanen 1) ja spin-1/2 -hiukkasen (hiukkanen 2) muodostamaa systeemiä.
- (a) (2p.) Kirjoita kaikki kytketyn kannan tilat kytkemättömien tilojen avulla. (Clebsch–Gordan -kertoimet saa katsoa taulukosta.)
- (b) (2p.) Olkoon systeemin Hamiltonin operaattori

$$H = \frac{E_0}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2,$$

missä E_0 on vakio, ja \vec{S}_1 ja \vec{S}_2 ovat hiukkasten 1 ja 2 spinoperaattorit. Mitä tuloksia on mahdollista saada, jos systeemin energia mitataan?

- (c) (2p.) Oletetaan, että kummankin hiukkasen spin on mitattu z -akselin suunnassa, ja saatu tulos $+\hbar$ hiukkaselle 1 ja $+\hbar/2$ hiukkaselle 2. Jos systeemin energia mitataan välittömästi tämän mittauksen jälkeen, mitkä ovat eri energian arvoihin liittyvät todennäköisyydet?
4. (a) (3p.) Tarkastellaan heikkoon sähkökenttään asetettua harmonista oskillaattoria. Tällöin häiritsemätön Hamiltonin operaattori on $H_0 = P^2/2m + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ ja häiriö $V = -q|\vec{E}|x$. Laske häiriöteorian avulla ensimmäisen ja toisen kertaluvun korjaukset perustilan $|0\rangle$ energiaan.
- (b) (3p.) Arvioi variaatiomenetelmän avulla yksiulotteisen potentiaalin $V(x) = \lambda x^4$ perustilan energiaa. Valitse yritefunktiksi $\psi_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$.

Hyötytietoa:

$$\begin{aligned}
 e^{ix} &= \cos x + i \sin x & e^{i\pi} + 1 &= 0 \\
 \sin x &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) & \cos x &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \\
 \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x & \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
 \frac{1}{2} (1 - \cos x) &= \sin^2 \frac{x}{2} & \frac{1}{2} (1 + \cos x) &= \cos^2 \frac{x}{2} \\
 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} (x - x_0)^n & e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
 \int_0^{\infty} dx x^n e^{-cx} &= \frac{n!}{c^{n+1}} & \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-cx^2} &= \sqrt{\frac{\pi}{c}} \\
 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-cx^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{c^3}} & \int_{-\infty}^{\infty} dx x^4 e^{-cx^2} &= \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{c^5}} \\
 \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) &= f(x_0) & \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) &= 1 \\
 \tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) & f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \tilde{f}(k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle &= H |\psi(t)\rangle \\
 U(t) &= e^{-iHt/\hbar} \\
 \Delta A &= \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} & \Delta A \Delta B &\geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \\
 \Delta x \Delta p &\geq \frac{\hbar}{2} & \Delta E \Delta t &\geq \frac{\hbar}{2} \\
 \frac{d\langle A \rangle}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle \\
 H &= \frac{P^2}{2m} + V(x) & [X, P] &= i\hbar \\
 \psi(x) &= \langle x | \psi \rangle & X = x & \quad P = -i\hbar \frac{d}{dx} \\
 H &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \\
 i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t) \\
 -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} &+ V(x) \psi(x) = E \psi(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c &= 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s} & \hbar &= 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js} & q_e &= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\
 \epsilon_0 &= 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} & \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} & m_e &= 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(t) &= e^{-iHt/\hbar} & T(\vec{a}) &= e^{-i\vec{P}\cdot\vec{a}/\hbar} & R_{\vec{n}}(\theta) &= e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}/\hbar} \\
[J_x, J_y] &= i\hbar J_z & [J_y, J_z] &= i\hbar J_x & [J_z, J_x] &= i\hbar J_y \\
J^2 &= J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 & J_{\pm} &= J_x \pm iJ_y \\
[J_z, J^2] &= 0 & [J_z, J_{\pm}] &= \pm\hbar J_{\pm} & [J_+, J_-] &= 2\hbar J_z \\
J^2|jm\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|jm\rangle & J_z|jm\rangle &= m\hbar|jm\rangle \\
J_{\pm}|jm\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|j, m\pm 1\rangle \\
\vec{S} &= \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} & \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i &= 2i \sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k & \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i &= 2\delta_{ij} \\
H &= -\vec{\mu} \cdot \vec{B} & \vec{\mu} &= \gamma\vec{S} = g\frac{q}{2m}\vec{S} & g_e &\simeq 2 \\
|j_1j_2, jm\rangle &= \sum_{m_1, m_2} \langle j_1m_1, j_2m_2|jm\rangle|j_1m_1\rangle|j_2m_2\rangle \\
E_n^{(1)} &= \langle \psi_n^{(0)}|V|\psi_n^{(0)}\rangle \\
E_n^{(2)} &= \sum_{m\neq q} \frac{|\langle \psi_m^{(0)}|V|\psi_n^{(0)}\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} & |\psi_n^{(1)}\rangle &= \sum_{m\neq q} \frac{\langle \psi_m^{(0)}|V|\psi_n^{(0)}\rangle^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\psi_m^{(0)}\rangle
\end{aligned}$$

Spin-1 -hiukkasen spinoperaattorin komponentit:

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Harmoninen oskillaattori:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) \\
a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}P & a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}P \\
a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle & a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle & H|n\rangle &= \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle
\end{aligned}$$

Vetyatomi:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m} \quad E_0 = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{ eV}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{100}(r) &= \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \\
\psi_{200}(r) &= \frac{1}{\sqrt{32\pi a_0^3}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0} \\
\psi_{210}(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{32\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \cos \theta \\
\psi_{21\pm 1}(r, \theta, \phi) &= \mp \frac{1}{\sqrt{32\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \sin \theta e^{\pm i\phi}
\end{aligned}$$

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

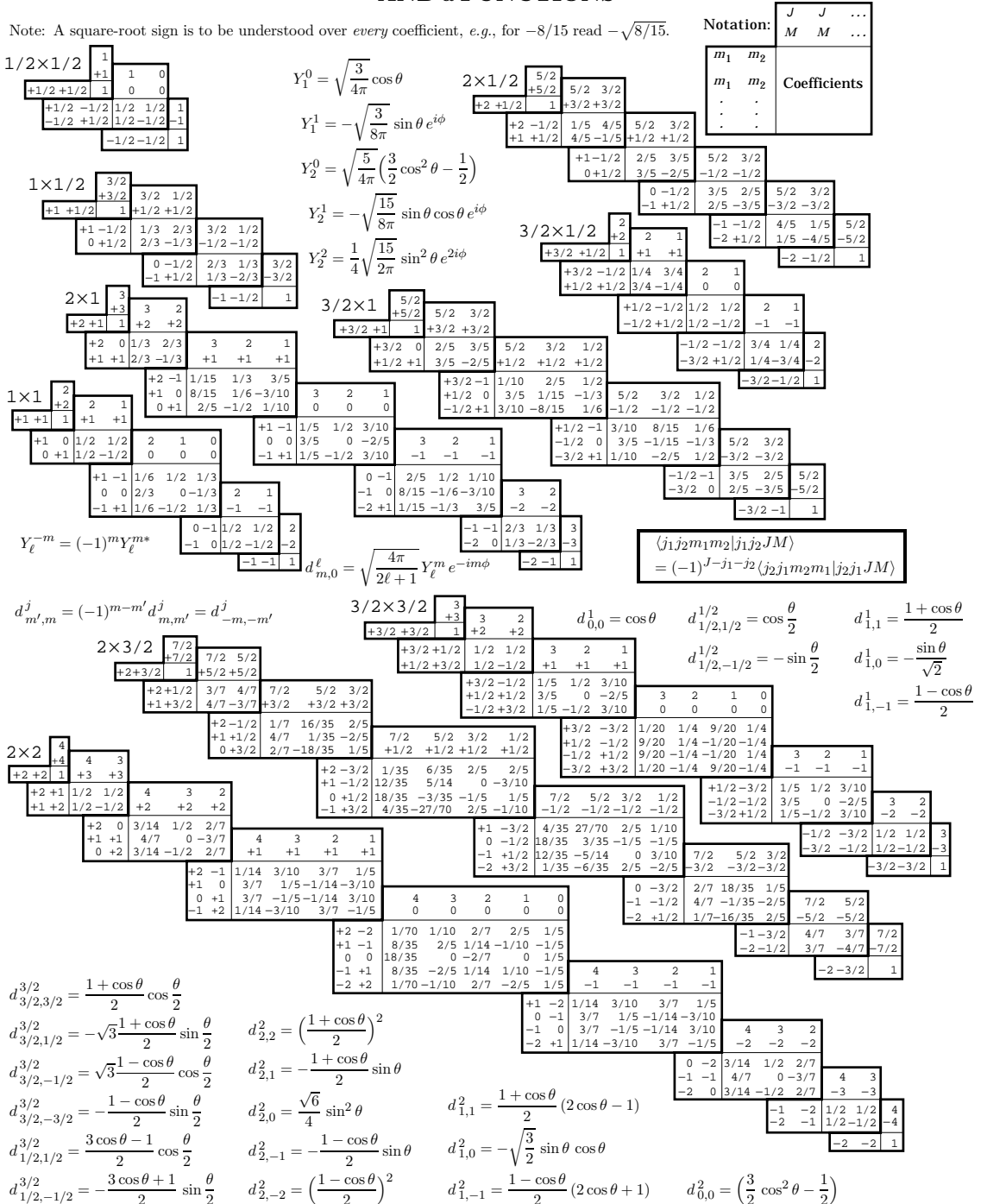


Figure 34.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.