FYSA231 Kvanttimekaniikka I, Osa B 21.1.2011

Tentti: 4 tehtävää, 4 tuntia

1. Tarkastellaan spinitöntä hiukkasta kolmiulotteisessa, pallosymmetrisessä ja äärettömän korkeassa potentiaalilaatikossa

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{kun} \quad r < a \\ \infty & \text{kun} \quad r \geq a. \end{cases} \tag{1}$$

Systeemin Hamiltonin operaattori on siis

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r). \tag{2}$$

(a) (2p) Separoi systeemin stationaarinen Schrödingerin yhtälö yritteellä $\Psi(\vec{r}) = R(r)Y_\ell^m(\theta, \phi)$, ja johda radiaalinen Schrödingerin yhtälö.

(b) (2p) Redusoi saamasi yhtälö edelleen yksiulotteisen liikkeen Schrödingerin yhtälöksi efektiivisessä potentiaalissa $V_{\text{eff}}(r)$; vinkki: $R(r) = u(r)/r$. Hahmottele $V_{\text{eff}}(r)$ tapauksissa $\ell = 0, 1, 2$.

(c) (2p) Laske systeemin perustilan energia ja perustilan normitettu aaltofunktio.

2. Tarkastellaan Hamiltonin operaattoria

$$H = H_0 + H_1$$

missä

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad H_1 = \begin{pmatrix} 0 & ia \\ -ia & 0 \end{pmatrix},$$

ja häiriö $|a| \ll |E_1 - E_2|$. Ominaisenergioita E_1 ja E_2 vastaavat häiritsemättömän järjestelmän ominaistilat

$$|1\rangle^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |2\rangle^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (2p) Oletataan $E_1 \neq E_2$, eli järjestelmällä on kaksi degeneroitumatonta ominaisenergiaa. Laske häiriöteoriaa käyttäen ensimmäisen ja toisen kertaluvun korjaukset energioihin E_1 ja E_2.

(b) (2p) Olkoon sitten $E_1 = E_2$. Laske häiriöteoreettiset ensimmäisen kertaluvun energiakorjaukset tässä tapauksessa.

(c) (2p) Ratkaise Hamiltonin operaattorin $H = H_0 + H_1$ ominaisarvot eksaktisti ja vertaa edellisissä kohdissa laskemiisi tuloksiin. Kehitelmästä $\sqrt{1 + x^2} \approx 1 + x^2/2 + \ldots$ saattaa olla apua vertailussa.

3. (a) (2p) Olkoon $|jm\rangle$ pyörimismäärän ominaistila, ts.

$$\begin{aligned} J^2|jm\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|jm\rangle, \\ J_z|jm\rangle &= \hbar m|jm\rangle. \end{aligned}$$

Nosto- ja laskuoperaattorit määritellään $J_\pm = J_x \pm iJ_y$. Osoita, että tila $J_-|jm\rangle$ on operaattorin J_z ominaistila ominaisarvolla $\hbar(m-1)$.

(b) (2p) Tarkastellaan vetyatomin perustilaa

$$\psi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}.$$

Laske odotusarvo $\langle r\rangle_\psi$.

(c) (2p) Harmonisen oskillaattorin Hamiltonin operaattori on

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

ja energian ominaisarvot ovat $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$. Tarkastellaan häiriötä

$$V(x) = \lambda x,$$

missä $\lambda^2 \ll m\omega^2$. Totea, että tästä aiheutuva 1. kertaluvun häiriöteorian korjaus on nolla.

4. (a) (3p) Kerro vedynkaltaisen atomin energiaspektrin rakenteesta. Yksityiskohtaisia laskuja ei tarvitse esittää. Voit käyttää energiatasokaavioita selventämään selvitystäsi. Huomaa erityisesti että tässä tehtävässä **ei** tarvitse kertoa miten vetyatomin energiaspektri johdetaan!

(b) (3p) Tarkastellaan vetyatomin perustilaa $|1,0,0\rangle|m_s\rangle_e|m_s\rangle_p$ ja yksinkertaista mallia ylihienorakenteelle

$$H = H_0 + \lambda(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{S}_p), \quad H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Nyt siis huomioidaan sekä elektronin (e) että protonin (p) spin, joten perustilan degeneraatio on 4. Hahmottele energiatasokaavio joka seuraa kun huomioidaan edellä määritelty elektronin ja protonin spinin kytkentä, ja perustele piirrustuksesi häiriöteoreettisin laskuin. **Mikäli tarvitset CG-kertoimia, voit lukea ne oheisesta taulukosta.**