tentti: 4 tehtävää, 4h

1. **a)** Olkoon kvanttimekaanisen 1-ulotteisen systeemin potentiaali ajasta riippumaton eli Hamiltonin operaattori on muotoa

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x).$$

Tee muuttujien separointi aaltomekaniikan Schrödingerin yhtälöön, johda stationäärinen Schrödingerin yhtälö $\hat{H}\psi_E(x) = E\psi_E(x)$ tälle systeemille ja ratkaise myös aikariippuva osa. Kirjoita lopuksi Schrödingerin yhtälön yleisen ajasta riippuvan ratkaisun muoto stationääristen tilojen aaltofunktioiden muodostamassa kannassa. *(2p)*

b) Pariteettioperaattori määritellään seuraavasti: $\hat{P}\psi(x) \equiv \psi(-x)$. Näytä, että kyseessä on hermiittinen operaattori, jonka ominaisarvot ovat ± 1. *(1p)*

c) Miten tunnistat kvanttimekaanisen liikevakion? *(1p)*

d) Anna yksi esimerkki tunneloitumisesta. Miten tilanne eroaa klassisesta mekaniikasta? *(1p)*

e) Mitä tarkoitetaan minimiaaltopaketilla? *(1p)*

2. Tarkastellaan tässäkin tehtävässä 1-ulotteista systeemiä.

a) Näytä, käyttäen Diracin merkintää, että $d\langle x\rangle/dt = \langle p\rangle/m$ systeemille, jonka Hamiltonin operaattori on $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$. Tehtäväpaperin lopun kaavastosta löytynee apua. *(2p)*

b) Olkoon tarkasteltavan systeemin x-esityksen aaltofunktio muotoa

$$\psi(x) = Be^{-a|x|/2},$$

missä vakio $a > 0$ ja B on normitusvakio. Laske todennäköisyys sille, että hiukkanen löytyy alueesta $|x| < 1/a$. *(2p)*

c) Oletetaan, että tunnemme systeemin tilaa kuvaavan x-esityksen aaltofunktion $\psi(x)$. Selitä (sanoin ja kaavojen avulla), miten voimme laskea todennäköisyyden sille, että kyseisestä tilasta mitattuna hiukkasen liikemäärä p on välillä $p_1 \leq p \leq p_2$. *(2p)*

Käännä!

3. Tarkastellaan 2-tilasysteemiä, jossa potentiaali on ajasta riippumaton ja jossa tunnetaan observaabelia A vastaava (ajasta riippumaton) operaattori $\hat{A}$ ortonormaalissa ominaiskannassaan:

$$\begin{aligned} \hat{A}|1\rangle &= a_1|1\rangle, \\ \hat{A}|2\rangle &= a_2|2\rangle, \end{aligned}$$

missä lisäksi olkoon $a_1 \neq a_2$. Systeemin Hamiltonin operaattori operoikoon tässä kannassa nyt seuraavasti:

$$\begin{aligned} \hat{H}|1\rangle &= 7\hbar\omega|1\rangle + 24\hbar\omega|2\rangle, \\ \hat{H}|2\rangle &= 24\hbar\omega|1\rangle - 7\hbar\omega|2\rangle. \end{aligned}$$

a) Mitkä ovat ko. systeemissä mahdolliset energian arvot? *(2p)*

b) Mitkä ovat ko. systeemin normitetut energian ominaistilat, lausuttuna tilojen $|1\rangle$ ja $|2\rangle$ avulla? Entä mikä on systeemin perustila? *(2p)*

c) Mitataan observaabeli A ajan hetkellä $t = t_0$ ja sovitaan, että saimme tulokseksi a_1. Annetaan systeemin kehittyä tämän jälkeen rauhassa hetkeen $t = t_0 + \frac{\pi}{100\omega}$ saakka ja mitataan A tällöin uudestaan. Millä todennäköisyydellä saadaan jälleen tulokseksi a_1? *(2p)* Muistin virkistykseksi: $|\Psi(t)\rangle = \sum_N c_N e^{-\frac{i}{\hbar}E_N(t-t_0)}|E_N\rangle$.

[Huom: vaikka et olisi saanut a- ja b-kohtia täysin lasketuksi, c-kohta kannattaa kuitenkin tehdä mahdollisimman pitkälle.]

4. Tarkastellaan m-massaista hiukkasta potentiaalikuopassa, jonka toinen reuna on ääretön korkea. Potentiaali on siis muotoa

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{kun } x \leq 0; \\ 0, & \text{kun } 0 < x \leq L; \\ V_0, & \text{kun } x \geq L, \end{cases}$$

missä vakio $V_0 > 0$.

Lähtemällä systeemin stationäärisestä Schrödingerin yhtälöstä etsi systeemin sidottujen tilojen energian ominaistiloja kuvaavat aaltofunktiot (normitusvakiota <u>ei</u> tarvitse laskea!) ja määritä erityisesti, kuinka monta sidottua tilaa ko. systeemillä on, jos $2mV_0L^2/\hbar^2 = (3\pi)^2$.

Energian tarkkoja arvoja <u>ei</u> tässä tarvitse laskea (koska tuloksena on transkendenttiyhtälö), mutta piirrä kuva ja sen avulla selitä, miten ko. sidottujen tilojen energian ominaisarvot saadaan selville.

Trigonometrian tueksi, kuvan piirtämisen helpottamiseksi:
$-\cot\alpha \to \infty$, kun $\alpha \to n\pi$ vasemmalta, sekä $\cot(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 0$.
Huomaathan myös, että koska potentiaalilla <u>ei</u> tässä ole symmetriaa $V(-x) = V(x)$, jako parittomiin ja parillisiin ratkaisuihin <u>ei</u> nyt onnistu.

Hyödyllisiä (?) kaavoja mihin tahansa tehtävään:
$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$
$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y, \qquad \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$
$[A,B] \equiv AB - BA, \quad [AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$
$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\rangle + \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{A}]\rangle$