FYSA233 Kvanttimekaniikka I, Osa A 23.11. 2012

tentti: 4 tehtävää, 4 tuntia

---

1. Tarkastellaan kvanttimekaanista kaksitilasysteemiä. Eräällä systeemin observaabelilla A on ominaistilat $|+\rangle$ ja $|-\rangle$, joille pätee

$$A|+\rangle = |+\rangle, \quad A|-\rangle = -|-\rangle.$$

Systeemin Hamiltonin operaattorille puolestaan pätee

$$H|+\rangle = E|+\rangle + i\delta|-\rangle, \;\; H|-\rangle = -i\delta|+\rangle + E|-\rangle.$$

missä E ja δ ovat reaalilukuja.

(a) (2p.) Kirjoita operaattoria A ja H esittävät matriisit ominaistilojen $|+\rangle$ ja $|-\rangle$ muodostamassa kannassa.

(b) (2p.) Olkoon systeemi tilassa $|+\rangle$. Jos tästä tilasta mitataan energia, niin mitkä ovat mahdolliset mittaustulokset ja niiden havaitsemiseen liittyvät todennäköisyydet?

(c) (2p.) Merkitään energian ominaisarvoja ϵ_+ ja ϵ_- ($\epsilon_+ > \epsilon_-$), sekä niihin liittyviä ominaistiloja $|\epsilon_+\rangle$ ja $|\epsilon_-\rangle$. Jos (b)-kohdassa energian mittaus antoi tuloksen ϵ_+, niin mikä on systeemiä kuvaava tilavektori välittömästi mittauksen jälkeen? Jos nyt mitataan A niin mitä arvoja voidaan saada, ja millä todennäköisyyksillä?

2. Tarkastellaan kvanttimekaanista symmetristä kaksoiskuoppaa, jolla on kaksi ortonormitettua sidottua tilaa, parillinen ja pariton ($|E\rangle$ ja $|O\rangle$). Olkoon tilojen energiat E_1 ja E_2, eli

$$\begin{aligned} H|E\rangle &= E_1|E\rangle, \\ H|O\rangle &= E_2|O\rangle. \end{aligned}$$

(a) (1p.) Olkoon järjestelmä hetkellä $t = 0$ tilassa

$$|\Psi(0)\rangle = \alpha|E\rangle + \beta|O\rangle,$$

missä $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Mikä on järjestelmän tila $|\Psi(t)\rangle$ hetkellä $t > 0$?

(b) (3p.) Kun järjestelmä on tilassa $(|E\rangle + |O\rangle)/\sqrt{2}$, todennäköisyys löytää hiukkanen vasemmanpuoleisesta kuopasta on 1. Kun järjestelmän tila on $(|E\rangle - |O\rangle)/\sqrt{2}$, todennäköisyys löytää hiukkanen oikeanpuoleisesta kuopasta on 1. Olkoon järjestelmä preparoitu siten, että hetkellä $t = 0$ hiukkanen on varmasti vasemmanpuoleisessa kuopassa, eli $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$. Laske todennäköisyys, että hetkellä $t > 0$ hiukkanen löytyy oikeanpuoleisesta kuopasta. Kauanko kuluu siihen, että hiukkanen löydetään oikeanpuoleisesta kuopasta todennäköisyydellä 1?

(c) (2p.) Oletetaan, että hiukkanen löytyi oikeanpuoleisesta kuopasta hetkellä t. Millä todennäköisyydellä hiukkanen tällöin löytyy vasemmanpuoleisesta kuopasta hetkellä $3t$, jos systeemistä ei tehdä mitään mittauksia hetkien t ja $3t$ välisenä aikana.

3. (a) (3p.) Olkoon H systeemin Hamiltonin operaattori, ja A jotakin observaabelia kuvaava operaattori. Johda Ehrenfestin teoreema

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\langle[A,H]\rangle + \langle\frac{\partial A}{\partial t}\rangle.$$

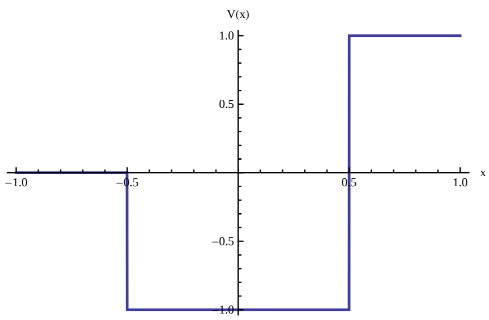
(b) (3p.) Tarkastellaan potentiaalia

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < -L/2, \\ -V_0, & |x| < L/2, \\ V_0, & x > L/2. \end{cases}$$

Oheisessa kuvassa on valittu $V_0 = 1$ eV ja $L = 0.5$ nm. Sirontaratkaisut ja sidotut tilat toteuttavat ajasta riippumattoman Schrödingerin yhtälön,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

Kirjoita Schrödingerin yhtälön yleisin normittuva ratkaisu, kun $E < 0$ (mutta $E > -V_0$). Mitkä ehdot aaltofunktion ja sen derivaatan täytyy toteuttaa pisteissä $x = \pm L/2$?



4. Yksiulotteisen harmonisen oskillaattorin Hamiltonin operaattori on

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2.$$

Määritellään lasku- ja nosto-operaattorit

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}P, \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}P.$$

(a) (1p.) Johda kommutaatiorelaatio $[a, a^\dagger] = 1$.

(b) (2p.) Tarkastellaan lukumääräoperaattorin $N = a^\dagger a$ ominaistiloja, joille pätee $N|n\rangle = n|n\rangle$. Näytä, että a laskee ja $a^\dagger$ nostaa ominaisarvoa yhdellä; siis

$$Na|n\rangle = (n-1)a|n\rangle, \qquad Na^\dagger|n\rangle = (n+1)a^\dagger|n\rangle.$$

(c) (1p.) Määrää vakiot C ja C' siten, että tilat $|n-1\rangle = Ca|n\rangle$ ja $|n+1\rangle = C'a^\dagger|n\rangle$ ovat normitettuja.

(d) (2p.) Laske operaattoreiden X ja X^2 odotusarvot tilassa $|n\rangle$.

Hyötytietoa:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \qquad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos x) = \sin^2 \frac{x}{2} \qquad \frac{1}{2}(1 + \cos x) = \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-cx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-cx^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2c^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x - x_0) = 1$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} \tilde{f}(k)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar}$$

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} \qquad \Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle [A, B] \rangle|$$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x) \qquad [X, P] = i\hbar$$

$$\psi(x) = \langle x|\psi \rangle \qquad X = x \qquad P = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \qquad \hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \qquad q_e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$