tentti: 4 tehtävää, 4 tuntia

1. Tarkastellaan kvanttimekaanista kaksitilasysteemiä. Eräällä systeemin observaabelilla A on ominaistilat $|+\rangle$ ja $|-\rangle$, joille pätee

$$A|+\rangle = |+\rangle, \quad A|-\rangle = -|-\rangle.$$

   (a) (1p.) Kirjoita operaattoria A esittävä matriisi ominaistilojen $|+\rangle$ ja $|-\rangle$ muodostamassa kannassa, ja totea, että A on hermiittinen.

   (b) (3p.) Systeemin Hamiltonin operaattori on

$$H = \begin{pmatrix} E & -i\delta \\ i\delta & E \end{pmatrix},$$

   missä E ja δ ovat reaalilukuja. Olkoon systeemi tilassa $|+\rangle$. Jos tästä tilasta mitataan energia, niin mitkä ovat mahdolliset mittaustulokset ja niiden havaitsemiseen liittyvät todennäköisyydet?

   (c) (2p.) Merkitään energian ominaisarvoja ϵ_+ ja ϵ_- ($\epsilon_+ > \epsilon_-$), sekä niihin liittyviä ominaistiloja $|\epsilon_+\rangle$ ja $|\epsilon_-\rangle$. Jos (b)-kohdassa energian mittaus antoi tuloksen ϵ_+, niin mikä on systeemiä kuvaava tilavektori välittömästi mittauksen jälkeen? Jos nyt mitataan A niin mitä arvoja voidaan saada, ja millä todennäköisyyksillä?

2. Tarkastellaan elektronia, jota kuvaa Hamiltonin operaattori

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Lisäksi systeemiin liittyyvät observaabelit

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

   joiden molempien ominaisarvot ovat $\pm\hbar/2$.

   (a) (2p.) Olkoon elektroni hetkellä $t = 0$ operaattorin S_x ominaisarvoa $+\hbar/2$ vastaavassa ominaistilassa. Millä todennäköisyydellä hetkellä t suoritetussa observaabelin S_y mittauksessa saadaan tulos $+\hbar/2$?

   (b) (1p.) Mikä on systeemin tilavektori välittömästi kohdassa (a) suoritetun mittauksen jälkeen, jos mittaus antoi tuloksen $+\hbar/2$?

   (c) (2p.) Jos (a)-kohdassa suoritetun mittauksen (jonka tulos siis oli $+\hbar/2$) jälkeen odotetaan ajan T verran ja mitataan uudestaan S_y, niin millä todennäköisyydellä saadaan tulos $+\hbar/2$? Millä T:n arvoilla saadaan mittauksessa tulos $+\hbar/2$ täysin varmasti (siis todennäköisyydellä 1)?

   (d) (1p.) Onko S_y liikevakio? Perustele vastauksesi.

3. (a) (3p.) Lähtien liikkeelle aaltomekaniikan ajasta riippuvasta Schrödingerin yhtälöstä, suorita aika- ja paikkariippuvuuden separointi ja osoita, että energian ominaistilojen aaltofunktiot ovat muotoa

$$\Psi(x,t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(x),$$

missä $\psi(x)$ toteuttaa stationaarisen Schrödingerin yhtälön

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

(b) (3p.) Osoita, että aaltofunktion $\Psi(x,t)$ todennäköisyystiheys $\rho(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$ ja todennäköisyysvirta

$$j(x,t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t) - \Psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi^*(x,t)\right)$$

toteuttavat jatkuvuusyhtälön

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}.$$

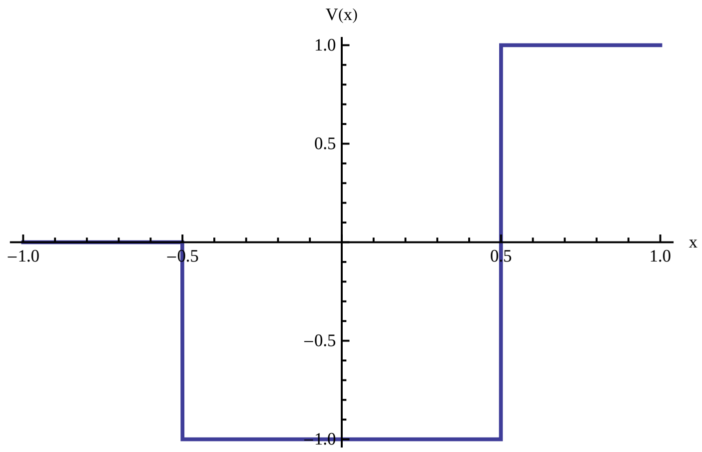
4. (a) (3p.) Tarkastellaan potentiaalia

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < L/2, \\ -V_0, & |x| < L/2, \\ V_0, & x > L/2. \end{cases}$$

Oheisessa kuvassa on valittu $V_0 = 1$ eV ja $L = 0.5$ nm. Sirontaratkaisut ja sidotut tilat toteuttavat ajasta riippumattoman Schrödingerin yhtälön,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

Kirjoita Schrödingerin yhtälön yleisin normittuva ratkaisu, kun $E < 0$ (mutta $E > -V_0$). Mitkä ehdot aaltofunktion ja sen derivaatan täytyy toteuttaa pisteissä $x = \pm L/2$?



(b) (3p.) Yksiulotteisen harmonisen oskillaattorin Hamiltonin operaattori on

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2.$$

Määritellään lasku- ja nosto-operaattorit

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} P, \\ a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} P. \end{aligned}$$

Johda kommutaatiorelaatio $[a, a^\dagger] = 1$. Tarkastele sitten lukumääräoperaattorin $N = a^\dagger a$ ominaistiloja, joille pätee $N|n\rangle = n|n\rangle$. Näytä, että a laskee ja $a^\dagger$ nostaa ominaisarvoa yhdellä; siis

$$Na|n\rangle = (n-1)a|n\rangle, \qquad Na^\dagger|n\rangle = (n+1)|n\rangle.$$

Hyötytietoa:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \qquad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos x) = \sin^2 \frac{x}{2} \qquad \frac{1}{2}(1 + \cos x) = \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-cx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-cx^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2c^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x - x_0) = 1$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} \tilde{f}(k)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar}$$

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} \qquad \Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x) \qquad [X, P] = i\hbar$$

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle \qquad X = x \qquad P = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x,t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \qquad \hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \qquad q_e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$