**FYSA241, kevät 2012**
Tentti pe 23.3.2012. Kesto 4 tuntia.
Exam Friday March 23rd, 2012. Duration: 4 hours.
Questions in English at the end of the sheet.

1. Ideaalikaasun tilavuus on 5 litraa, lämpötila 27°C ja paine 2 atm. Kaasua lämmitetään vakiopaineessa lämpötilaan $T$, jolloin sen tekemä työ on 200 J. Mikä on lämpötila $T$?

2. Käyttäen termodynamiikan toista pääsääntöä (jonka mukaan järjestelmän ja ympäristön kokonaisentropia kasvaa) osoita, että kahden vakiolämpötilassa pysyvän lämpövaraston välillä toimivan lämpövoimakoneen hyötysuhde on pienempi tai yhtä suuri kuin Carnot'n ideaalikoneen hyötysuhde.

3. Tarkastellaan $N$ atomia, jotka ovat säännöllisessä kidehilassa. Hilassa on myös $qN$ välitilapaikkaa, joihin siirtyneen atomin energia on $\varepsilon$ korkeampi. Oletetaan, että järjestelmä on tasapainotilassa, jossa $n$ atomia on siirtynyt välitilapaikalle. Laske tilan entropia ja lämpötila.

4. Lämpökylvyssä oleva järjestelmä (lämpötila $T$) koostuu $N$:stä keskenään hyvin heikosti vuorovaikuttavasta identtisestä osasta, joilla on neljä mahdollista energiatilaa: $E_0 = 0, E_1 = E_2 = \varepsilon$ ja $E_3 = 2\varepsilon$ (tilat 1 ja 2 ovat siis degeneroituneita). Laske järjestelmän keskimääräinen energia sekä lämpökapasiteetti $C_V$.

5. Sileän, tasaisen jään päälle laitetaan 10 m korkea sileä, tasainen möhkäle rautaa (tiheys 7.9g/cm$^3$), joka pidetään tasaisessa $-0.5$°C lämpötilassa. Vajoaako rauta jään sisään? Entä jos rautakappale on muhkurainen, niin että ainoastaan 0.1% sen pohjapinta-alasta koskettaa jäätä? Jään sulamislämpö 1 atm:n paineessa on 335 kJ/kg. Jään tiheys on 0.9168 g/cm$^3$ ja veden tiheys 0.9999 g/cm$^3$.

---

1. Consider 5 litres of ideal gas at the temperature 27°C and pressure 2 atm. The gas is heated at constant pressure to the temperature $T$ and it performs 200 J of mechanical work in the process. What is the temperature $T$?

2. Using the second law of thermodynamics (which says that the total entropy of a system and its environment increases or stays constant) show that the efficiency of a heat engine operating between two reservoirs at constant temperatures is smaller or equal to the efficiency of an ideal Carnot engine.

3. Consider $N$ atoms in a regular lattice. There are also $qN$ interstitial sites in the lattice. The energy of an atom that "jumps" to an interstitial site is $\varepsilon$ higher than at a normal site. Assuming that the system is in an equilibrium with $n$ atoms on interstitial sites calculate the entropy and temperature of the system.

4. A system in a heat bath (temperature $T$) consists of $N$ identical parts that interact very weakly with each other. Each part has four possible energy states: $E_0 = 0, E_1 = E_2 = \varepsilon$ ja $E_3 = 2\varepsilon$ (i.e. states 1 and 2 are degenerate). Calculate the mean energy and heat capacity $C_V$ of the system.

5. A 10 m high chunk of iron (density 7.9g/cm$^3$) with a perfectly even, straight surface, is placed on an even, straight surface of ice and maintained at a constant $-0.5$°C temperature. Does the iron gradually sink inside the ice? What if the surface of the iron is rough, so that only 0.1% of its surface touches the ice? The latent heat of ice at 1 atm pressure is 335 kJ/kg. The density of ice is 0.9168 g/cm$^3$ and the density of water 0.9999 g/cm$^3$.

## Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\mathrm{J/K} \quad R = k_B N_A = 8.3143\mathrm{J/molK} \quad N_A = 6.022 \times 10^{23}/\mathrm{mol} \tag{1}$$

$$k_B \cdot 300\mathrm{K} \approx \frac{1}{40}\mathrm{eV} \quad 0^\circ\mathrm{C} = 273.15\mathrm{K} \quad 1\mathrm{atm} = 101.3\mathrm{kPa} \quad g = 9.82\mathrm{m/s}^2 \tag{2}$$

$$\mathrm{d}E = đQ + đW \overset{\text{rev.}}{=} T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V \quad \mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N \tag{3}$$

$$F = E - TS \quad G = E - TS + PV \quad H = E + PV \tag{4}$$

$$S = k_B \ln\Omega \quad \ln n! \approx n\ln n - n \quad \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!} \tag{5}$$

$$F = -k_B T \ln Z \quad E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z \tag{6}$$

$$C_V \equiv T\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}\right)_{V,N} = \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T}\right)_{V,N} \quad C_P \equiv T\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}\right)_{P,N} \tag{7}$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}\right)_{T,N} \quad \kappa_S \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}\right)_{S,N} \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \tag{9}$$

$$S = -k_B\sum_\nu p_\nu \ln p_\nu \quad p_\nu = \frac{1}{Z}e^{-\beta E_\nu} \quad Z = \sum_\nu e^{-\beta E_\nu} \quad \beta \equiv 1/(k_B T) \tag{10}$$

$$PV = Nk_BT = nRT \quad E = \frac{3}{2}Nk_BT \quad \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}\right)_{\mathrm{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1\to 2}(T)}{T\Delta V} \tag{11}$$

$$\sinh x \equiv \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \cosh x \equiv \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad (a+b)^N = \sum_{n=0}^{N}\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} a^n b^{N-n} \tag{13}$$