

## FYSA241, kevät 2012

Tentti pe 27.4.2012. Kesto 4 tuntia.

Exam Friday April 27th, 2012. Duration: 4 hours.

Questions in English at the end of the sheet.

1.  $N$ -atomisen ideaalikaasun sisäenergia on  $E = (3/2)Nk_B T$  ja tilanyhtälö  $PV = Nk_B T$ . Osoita, että kun kaasua puristetaan kasaan eristetyssä säiliössä, sen painelle ja tilavuudelle pätee  $PV^\gamma = \text{vakio}$ . Laske  $\gamma$ .
2. Eristetty säiliö (tilavuus  $2V_0$ ) on jaettu kahteen yhtäsuureen osaan, joista kummassakin on samaa ideaalikaasua samassa lämpötilassa. Toisessa osassa kaasun paine on  $P_0$  ja toisessa  $2P_0$ . Osien välinen seinä poistetaan. Laske entropian muutos, kun järjestelmä on saavuttanut tasapainotilan. Entä jos väliseinää ei poisteta, vaan se voi liikkua vapaasti ja asettua mekaaniseen tasapainoon?
3. Tarkastellaan  $N$  atomia, jotka ovat säännöllisessä kidehilassa. Hilassa on myös  $qN$  välitilapaikkaa, joihin siirtyneen atomin energia on  $\varepsilon$  korkeampi. Oletetaan, että järjestelmä on tasapainotilassa, jossa  $n$  atomia on siirtynyt välitilapaikalle. Laske tilan entropia ja lämpötila.
4. Yksiulotteisen harmoniseen värähtelijän energiatilat ovat  $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ ,  $n = 0, 1, \dots, \infty$ . Värähtelijä asetetaan lämpökylpyyn lämpötilassa  $T$ . Laske värähtelijän energian odotusarvo  $\langle E \rangle$  ja lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa  $C_V(T)$ .
5. Erään kaasun Gibbsin vapaa energia on

$$G = Nk_B T \ln P + PN(b - a/T) - (5/2)NT \ln(T/T_0), \quad (1)$$

missä  $a$ ,  $b$  ja  $T_0$  ovat vakioita. Määrää tämän kaasun tilanyhtälö  $P(V, N, T)$  ja lämpökapasiteetti vakioaineessa  $C_P$ .

6. Etanolin kylläisen höyryn paineelle  $P(T)$  on mitattu lämpötilariippuvuus

$$\ln \left( \frac{P(T)}{P_0} \right) = A - \frac{B}{T - C}, \quad (2)$$

missä  $P_0 = 1\text{Pa}$ ,  $A = 24$ ,  $B = 3800\text{K}$  ja  $C = 43\text{K}$ . Laske tästä etanolin höyrystymislämpö moolia kohti  $80^\circ\text{C}$  lämpötilassa. Voit olettaa, että etanolihöyry käyttäytyy kuten ideaalikaasu ja sen tiheys on häviävän pieni nestemäiseen etanoliin verrattuna.

1. An ideal gas with  $N$  atoms has the internal energy  $E = (3/2)Nk_B T$  and the equation of state  $PV = Nk_B T$ . Show, that when the gas is compressed while maintained insulated from the environment, its pressure and volume satisfy the relation  $PV^\gamma = \text{constant}$ . Calculate  $\gamma$ .
2. An isolated container (volume  $2V_0$ ) is divided into two equally large parts, filled with the same ideal gas at the same temperature. The pressure in one part is  $P_0$  and in the other one  $2P_0$ . The wall separating the parts is removed, calculate the change in entropy when the system has reached equilibrium. What if the wall is not removed, but is allowed to move freely?
3. Consider  $N$  atoms in a regular lattice. There are also  $qN$  interstitial sites in the lattice. The energy of an atom that “jumps” to an interstitial site is  $\varepsilon$  higher than at a normal site. Assuming that the system is in an equilibrium with  $n$  atoms on interstitial sites calculate the entropy and temperature of the system.
4. The energy states of a one dimensional harmonic oscillator are  $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ ,  $n = 0, 1, \dots, \infty$ . The oscillator is put in thermal contact with a heat bath at temperature  $T$ . Calculate the mean energy  $\langle E \rangle$  and the heat capacity  $C_V(T)$  of the oscillator.
5. The Gibbs free energy of a gas is

$$G = Nk_B T \ln P + PN(b - a/T) - (5/2)NT \ln(T/T_0), \quad (3)$$

where  $a$ ,  $b$  and  $T_0$  are constants. Determine the equation of state  $P(V, N, T)$  and heat capacity at constant pressure  $C_P$  for this gas.

6. The saturated vapor pressure of ethanol has been measured to follow

$$\ln \left( \frac{P(T)}{P_0} \right) = A - \frac{B}{T - C}, \quad (4)$$

where  $P_0 = 1\text{Pa}$ ,  $A = 24$ ,  $B = 3800\text{K}$  and  $C = 43\text{K}$ . Calculate from this the latent heat per mole of ethanol at the temperature of  $80^\circ\text{C}$ . You may assume that ethanol vapor is an ideal gas and that its density is negligible compared to liquid ethanol.

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23} \text{J/K} \quad R = k_B N_A = 8.3143 \text{J/molK} \quad N_A = 6.022 \times 10^{23} / \text{mol} \quad (5)$$

$$k_B \cdot 300\text{K} \approx \frac{1}{40} \text{eV} \quad 0^\circ\text{C} = 273.15\text{K} \quad 1\text{atm} = 101.3\text{kPa} \quad g = 9.82\text{m/s}^2 \quad (6)$$

$$dE = dQ + dW \stackrel{\text{rev.}}{\equiv} TdS - PdV \quad dE = TdS - PdV + \mu dN \quad (7)$$

$$F = E - TS \quad G = E - TS + PV \quad H = E + PV \quad (8)$$

$$S = k_B \ln \Omega \quad \ln n! \approx n \ln n - n \quad \binom{N}{n} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (9)$$

$$F = -k_B T \ln Z \quad E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (10)$$

$$C_V \equiv T \left( \frac{dS}{dT} \right)_{V,N} = \left( \frac{dE}{dT} \right)_{V,N} \quad C_P \equiv T \left( \frac{dS}{dT} \right)_{P,N} \quad (11)$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dP} \right)_{T,N} \quad \kappa_S \equiv -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dP} \right)_{S,N} \quad (12)$$

$$\left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_z \right]^{-1} \quad \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left( \frac{\partial x}{\partial w} \right)_z \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_z \quad \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1 \quad (13)$$

$$S = -k_B \sum_{\nu} p_{\nu} \ln p_{\nu} \quad p_{\nu} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_{\nu}} \quad Z = \sum_{\nu} e^{-\beta E_{\nu}} \quad \beta \equiv 1/(k_B T) \quad (14)$$

$$PV = Nk_B T = nRT \quad E = \frac{3}{2} Nk_B T \quad \left( \frac{dP}{dT} \right)_{\text{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1 \rightarrow 2}(T)}{T \Delta V} \quad (15)$$

$$\sinh x \equiv \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad \cosh x \equiv \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \quad \tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad (16)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (a+b)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} a^n b^{N-n} \quad (17)$$