FYSA242 Statistinen fysiikka, Loppukoe 11.5.2012

Tehtävä 1 ***(kaikki kohdat 1 piste)***
a) Mikä on Dulongin-Petit'n laki?
b) Millä ehdoilla kaasu on klassista ideaalikaasua?
c) Mikä on energian tasanjakauma eli ekvipartitio?
d) Miten vuorovaikutus ympäristön kanssa eroaa kanonisessa joukossa ja suurkanonisessa joukossa?
e) Miksi liikemäärätilojen jatkumoapproksimaatio pettää matalissa lämpötiloissa ideaaliselle bosekaasulle?
f) Mikä on ultraviolettikatastrofi?
g) Mikä on fermipinta?

Tehtävä 2 ***(3 + 4 pistettä)***
a) Mikä kvalitatiivinen ero on Einsteinin ja Debyen teorioiden lähtökohdissa ja miten se näkyy teorioiden ennusteessa aineiden lämpökapasiteetille C_V?
b) Yksi Debyen teorian tärkeimmistä yhtälöistä on

$$\int_0^{\omega_D} f(\omega)\, d\omega = 3N\,, \qquad f(\omega) = \frac{V\omega^2}{2\pi^2}\left(\frac{1}{v_L^3} + \frac{2}{v_T^3}\right)\,.$$

Mitä ovat $\omega_D, f(\omega)$, v_L ja v_T ja miksi yhtälön oikealla puolella on juuri $3N$? Mistä fysikaalisesta syystä integroinnin ylärajan ω_D täytyy olla äärellinen?

Tehtävä 3 ***(3 + 3 + 2 pistettä)***
a) Missä lämpötiloissa kiteen lämpökapasiteettia kuvaa $C_V = \gamma T + \alpha T^3$? Mistä kahdesta fysikaalisesta ilmiöstä termit tulevat?
b) Piirrä kaksiatomisten molekyylien ideaalikaasun lämpökapasiteetti C_V kvalitatiivisesti lämpötilan funktiona välillä $0 - 10000$K.
c) Reaalikaasuille saatiin tilanyhtälöksi van der Waalsin yhtälö $\left(P + \left(\frac{N}{V}\right)^2 a\right)\left(1 - \frac{N}{V}b\right) = \frac{Nk_BT}{V}$. Mikä on vakion a alkuperä? Entä vakion b?

Tehtävä 4 ***(4 + 3 pistettä)***
a) Osoita lähtien partitiofunktiosta, että klassiselle ideaalikaasulle suuri potentiaali $\Omega_G = -k_BTe^{\beta\mu}Z_1(T,V)$. Laske tästä hiukkaslukumäärän odotusarvo $\langle N\rangle$ ja johda edelleen ideaalikaasun tilanyhtälö.
b) Olkoon eristetyssä järjestelmässä faasit 1 ja 2 epätasapainossa siten, että vastaaville kemiallisille potentiaaleille pätee $\mu_1 > \mu_2$. Osoita tarkastelemalla entropian aikaderivaattaa, että hiukkasten lukumäärä vähenee faasissa 1 ja kasvaa faasissa 2.

Tehtävä 5 ***(2 + 3 + 4 pistettä)***
Mallinnetaan metallin johtavuuselektroneja ideaalisella fermikaasulla. Tiedät tekemistäsi jatkumoapproksimaatioista tilojen tiheydelle, että niiden elektronien lukumäärä, joiden energia on välillä $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon)$, on

$$\langle n(\epsilon)\rangle f(\epsilon)d\epsilon = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}$$

a) Millä ehdoilla mallimme toimii eli milloin ideaalinen fermikaasu on hyvä approksimaatio metallin johtavuuselektroneille?
b) Tiedetään, että johteessa on N johtavuuselektronia. Osoita, että

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{8\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}\,.$$

c) Olkoon lämpötila $0 < T \ll T_F$. Arvioi fermienergian yläpuolelle virittyvien elektronien lukumäärä N_{ex}. Lausu tuloksesi suhteen T/T_F funktiona (käytä apuna b-kohdan tulosta), jolloin saat

$$N_{ex} \approx \frac{3}{2}N\frac{T}{T_F}\,.$$

Arvioi tästä edelleen johtavuuselektronien kontribuutio lämpökapasiteettiin C_V.

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\ \mathrm{JK}^{-1} \qquad k_B \cdot 300\ \mathrm{K} \approx \frac{1}{40}\ \mathrm{eV} \qquad R = 8.3143\ \mathrm{J/mol\,K}$$

$$0\ ^\circ\mathrm{C} = 273.15\ \mathrm{K} \qquad c = 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s} \qquad m_e c^2 = 511\ \mathrm{keV}$$

$$1\ \mathrm{atm} = 1.013 \times 10^5\ \mathrm{Nm}^{-2} \qquad g = 9.81\ \mathrm{ms}^{-2} \qquad \hbar = 1.0545 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js}$$

$$\mathrm{d}E = đQ + đW \qquad \mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V \qquad \mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$$

$$S = k_B \ln\Omega \qquad \ln n! \sim n\ln n - n \qquad \binom{n}{m} = \frac{n!}{n!(n-m)!}$$

$$S = -k_B \sum_r p_r \ln p_r \qquad p_r = \frac{1}{Z}e^{-\beta E_r} \qquad Z = \sum_r e^{-\beta E_r} \qquad \beta = 1/k_B T$$

$$G = E - TS + PV \qquad F = E - TS \qquad F = -k_B T \ln Z \qquad E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z$$

$$PV = Nk_B T = nRT \qquad \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}\right)_{\mathrm{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{12}}{T\Delta V}$$

$$Z_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{N!}Z_1^N \qquad Z_1^{\mathrm{tr}} = V\left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \qquad P(v)\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left[\frac{-mv^2}{2k_B T}\right]\mathrm{d}v$$

$$p_{N,r} = \frac{1}{\mathcal{Z}}e^{\beta(\mu N - E_{N,r})} \qquad \mathcal{Z} = \sum_{N,r} e^{\beta(\mu N - E_{N,r})} \qquad \Omega = -k_B T \ln\mathcal{Z} = E - TS - \mu N = -PV$$

$$\mathcal{Z} = \prod_r \mathcal{Z}_r = \prod_r \sum_{n_r=0}^{\infty} e^{\beta(\mu-\varepsilon_r)n_r} \qquad \langle n_r\rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r-\mu)} \pm 1}$$

$$u(\omega,T)\mathrm{d}\omega = \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3\mathrm{d}\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \qquad \mu = \varepsilon_F\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \dots\right] \qquad k_B T_C \approx 3.3\times\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

$$f(x,y,z) = 0 \quad \text{"}\Rightarrow\text{"} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \quad \text{ja} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots \qquad (1+x)^q = 1 + qx + \frac{1}{2!}q(q-1)x^2 + \dots$$

H_2O paineessa 1 atm:

sulamislämpö 335 kJ/kg
höyrystymislämpö 2260 kJ/kg
0 °C:ssa veden tiheys 0.9999 g/cm^3 ja jään tiheys 0.9168 g/cm^3
100 °C:ssa veden tiheys 0.9588 g/cm^3 ja höyryn tiheys 0.0005977 g/cm^3