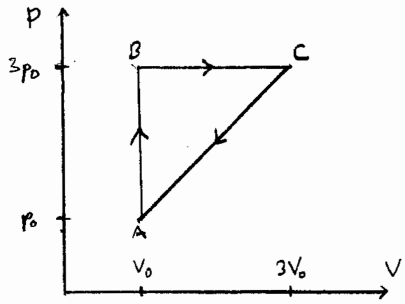
**FYSA241 STATISTINEN FYSIIKKA OSA A**
**Tentti pe 11.03.2011**

1. Mooli ideaalikaasua käy kvasistaattisesti läpi kuvan 1 mukaisen suljetun kierron. (a) Mikä on kaasun tämän kierron aikana tekemä työ $W(p_0, V_0)$? (b) Mikä on kaasun lämpömäärän muutos kierron aikana?




Kuva 1.

2. Hyvin eristetty kaasusäiliö, jonka tilavuus on 12 litraa, on jaettu väliseinällä kahteen yhtä suureen osaan. Väliseinän yhdellä puolella on klassista ideaalikaasua, jonka paine on 180 kPa ja lämpötila 310 K, ja toisella puolella on tyhjiö. Kun väliseinä poistetaan, kaasu täyttää nopeasti koko säiliön ja asettuu lopulta tasapainotilaan. Kuinka paljon kaasun lämpötila muuttuu? Laske myös kaasun entropian muutos tässä prosessissa.

3. Lämpökylvyssä oleva järjestelmä (lämpötila $T$) koostuu N:stä keskenään hyvin heikosti vuorovaikuttavasta identtisestä osasta, joilla kullakin on kolme mahdollista energiatilaa, $E_1 = 0$, $E_2 = \varepsilon$ ja $E_3 = 2\varepsilon$. Näiden tilojen degeneraatiot ovat $g(E_1) = 1$, $g(E_2) = 2$ ja $g(E_3) = 1$. Laske järjestelmän keskimääräinen energia sekä lämpökapasiteetti. Mikä on lämpökapasiteetin johtava termi hyvin matalissa lämpötiloissa?

4. Yksiatomisessa kiteessä atomit ovat yleensä säännöllisissä hilapaikoissa, mutta jotkut niistä ovat siirtyneet hilapaikkojen välissä oleviin välisijapaikkoihin, joissa niiden energia on $\varepsilon$:n verran suurempi. Oletetaan, että atomeita, hilapaikkoja ja välisijapaikkoja on kutakin $N$ kappaletta. Laske kiteen entropia tilanteessa, jossa $n$ atomia on välisijapaikoissa. Huomaa, että tilan statistinen paino koostuu $n$:n atomin ja $n$:n välisijapaikan valinnasta $N$:n mahdollisuuden joukosta. Laske myös tilaan liittyvä lämpötila, jos se on tasapainotila.

5. Rakennuksen lämmitykseen on varattu tehoa 4 kW. Sen lämpöhäviövirraksi on mitattu 1 kW jokaista sisä- ja ulkolämpötilojen välisen eron astetta kohti. Mikä on rakennuksen suurin mahdollinen sisälämpötila, jos ulkolämpötila on - 5 °C ja lämmitysteho (a) käytetään suoraan sisäilman lämmitykseen tai (b) käytetään hyväksi ideaalisessa lämpöpumpussa, jolla sisäilmaa sitten lämmitetään? Huomaa, että tasapainotilanteessa lämmön tuotto on yhtä suuri kuin lämpöhäviö.

6. Erään reaalikaasun Gibbsin vapaa energia voidaan esittää muodossa

$$G = Nk_BT\ln P + P(bN - aN/T) + f(T),$$

missä $a$ ja $b$ ovat vakioita ja $f(T)$ jokin annettu funktio. Määrää ko. kaasun tilanyhtälö $P = P(N, V, T)$ ensimmäisessä kertaluvussa vakioiden $a$ ja $b$ suhteen (ts. sarjakehitelmän se osa, jossa pidetään mukana vain suoraan $a$:han ja $b$:hen verrannolliset ja niistä riippumattomat termit).

## Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\ \mathrm{JK}^{-1} \qquad k_B \cdot 300\ \mathrm{K} \approx \frac{1}{40}\ \mathrm{eV} \qquad R = 8.3143\ \mathrm{J/mol\,K}$$

$$0\ ^\circ\mathrm{C} = 273.15\ \mathrm{K} \qquad c = 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s} \qquad m_e c^2 = 511\ \mathrm{keV}$$

$$1\ \mathrm{atm} = 1.013 \times 10^5\ \mathrm{Nm}^{-2} \qquad g = 9.81\ \mathrm{ms}^{-2} \qquad \hbar = 1.0545 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js}$$

$$\mathrm{d}E = đQ + đW \qquad \mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V \qquad \mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$$

$$S = k_B \ln\Omega \qquad \ln n! \sim n\ln n - n \qquad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$S = -k_B \sum_r p_r \ln p_r \qquad p_r = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_r} \qquad Z = \sum_r e^{-\beta E_r} \qquad \beta = 1/k_B T$$

$$G = E - TS + PV \qquad F = E - TS \qquad F = -k_B T \ln Z \qquad E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z$$

$$PV = Nk_B T = nRT \qquad \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}\right)_{\mathrm{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{12}}{T\Delta V}$$

$$Z_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{N!} Z_1^N \qquad Z_1^{\mathrm{tr}} = V\left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \qquad P(v)\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left[\frac{-mv^2}{2k_B T}\right]\mathrm{d}v$$

$$p_{N,r} = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{\beta(\mu N - E_{N,r})} \qquad \mathcal{Z} = \sum_{N,r} e^{\beta(\mu N - E_{N,r})} \qquad \Omega = -k_B T \ln\mathcal{Z} = E - TS - \mu N = -PV$$

$$\mathcal{Z} = \prod_r \mathcal{Z}_r = \prod_r \sum_{n_r=0}^{\infty} e^{\beta(\mu - \varepsilon_r)n_r} \qquad \langle n_r \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} \pm 1}$$

$$u(\omega,T)\mathrm{d}\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3 \mathrm{d}\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \qquad \mu = \varepsilon_F\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \ldots\right] \qquad k_B T_C \approx 3.3 \times \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

$$f(x,y,z) = 0 \quad \text{"}\Rightarrow\text{"} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \quad \text{ja} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1) \qquad e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots \qquad (1+x)^q = 1 + qx + \frac{1}{2!}q(q-1)x^2 + \ldots$$