

FYSA241, kevät 2013

Koe pe 30.8.2013. Kesto 4 tuntia.

Exam Friday August 30th, 2013. Duration: 4 hours.

Questions in English at the end of the sheet.

1. N -atomisen ideaalikaasun sisäenergia on $E = (3/2)Nk_B T$ ja tilanyhtälö $PV = Nk_B T$. Osoita, että kun kaasua puristetaan kasaan eristetyssä säiliössä, sen paineelle ja tilavuudelle pätee $PV^\gamma = \text{vakio}$. Laske γ .
2. Ideaalikaasu laajenee lämpöeristetyssä mutta laajenevassa säiliössä tilavuudesta V_0 , paineesta $2P_0$ ja lämpötilasta T_0 paineeseen P_0 . Mikä on kaasun entropian muutos?
3. Tarkastellaan jääkaappia, jonka kuuma lämpösäiliö on kuuma ilma jääkaapin takana lämpötilassa $T_1 = 47^\circ\text{C}$. Kompressorin käyttämä sähköteho on 100W ja huoneilmasta siirtyy jääkaappiin lämpöä teholla $k(T_0 - T)$, missä $k = 10\text{W/K}$, $T_0 = 27^\circ\text{C}$ on huoneilman lämpötila ja T jääkaapin sisälämpötila. Mikä on kylmin lämpötila, jonka tällainen jääkaappi voi teoriassa saavuttaa?
4. Järjestelmän lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa on

$$C_V(T) = T^2/\varepsilon^2, \quad (1)$$

missä ε on vakio. Kuinka monta energian E omaavaa mikrotilaa järjestelmällä on?

5. Yksiulotteisen harmoniseen värähtelijän energiatilat ovat $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$, $n = 0, 1, \dots, \infty$. Värähtelijä asetetaan lämpökylpyyn lämpötilassa T . Laske värähtelijän energian odotusarvo $\langle E \rangle$.
6. Erään aineen kahden faasin A ja B Gibbsin vapaat energiat moolia kohti paineen P_0 ja lämpötilan T_0 läheisyydessä ovat:

$$\frac{G}{n} = v_{A,B}(P - P_0) - s_{A,B}(T - T_0) + g_0, \quad (2)$$

missä $T_0 = 373\text{K}$, $P_0 = 10^5\text{Pa}$, $v_A = 1,8 \times 10^{-5}\text{m}^3/\text{mol}$, $v_B = 0,03\text{m}^3/\text{mol}$, $s_A = 70\text{J}/(\text{mol K})$ ja $s_B = 188\text{J}/(\text{mol K})$. Kumpi faaseista A ja B on kaasu ja kumpi neste? Mikä on höyrystymislämpö moolia kohti? Mikä on aineen kiehumispisteen lämpötila paineessa $P_0 + 10\text{kPa}$?

-
1. An ideal gas with N atoms has the internal energy $E = (3/2)Nk_B T$ and the equation of state $PV = Nk_B T$. Show, that when the gas is compressed while maintained insulated from the environment, its pressure and volume satisfy the relation $PV^\gamma = \text{constant}$. Calculate γ .
 2. A quantity of ideal gas expands in an isolated container from the volume V_0 , pressure $2P_0$ and temperature T_0 to the pressure P_0 . What is the change in the entropy of the gas in this process?

3. Consider a refrigerator, whose warm heat bath is the hot air behind the machine at the temperature $T_1 = 47^\circ\text{C}$. The electrical power consumption of the compressor is 100W and heat is transferred from the outside into the refrigerator with the power $k(T_0 - T)$, where $k = 10\text{W/K}$, $T_0 = 27^\circ\text{C}$ is the room air temperature and T the temperature inside the refrigerator. What is the coldest temperature that this refrigerator can, in principle, reach?
4. A system has the (constant volume) heat capacity

$$C_V(T) = T^2/\varepsilon^2, \quad (3)$$

where ε is a constant. How many microstates of energy E does this system have?

5. The energy states of a one dimensional harmonic oscillator are $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$, $n = 0, 1, \dots, \infty$. The oscillator is put in thermal contact with a heat bath at temperature T . Calculate the mean energy $\langle E \rangle$ of the oscillator.
6. A certain substance has two phases A and B , whose Gibbs free energies per mole close to the pressure P_0 and the temperature T_0 are:

$$\frac{G}{n} = v_{A,B}(P - P_0) - s_{A,B}(T - T_0) + g_0, \quad (4)$$

where $T_0 = 373\text{K}$, $P_0 = 10^5\text{Pa}$, $v_A = 1.8 \times 10^{-5}\text{m}^3/\text{mol}$, $v_B = 0.03\text{m}^3/\text{mol}$, $s_A = 70\text{J}/(\text{mol K})$ and $s_B = 188\text{J}/(\text{mol K})$. Which one of the phases A and B is a gas and which one a liquid? What is the latent heat of vaporization per mole? What is the boiling temperature of this substance at the pressure $P_0 + 10\text{kPa}$?

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\text{J/K} \quad R = k_B N_A = 8.3143\text{J/molK} \quad N_A = 6.022 \times 10^{23}/\text{mol} \quad (5)$$

$$k_B \cdot 300\text{K} \approx \frac{1}{40}\text{eV} \quad 0^\circ\text{C} = 273.15\text{K} \quad 1\text{atm} = 101.3\text{kPa} \quad g = 9.82\text{m/s}^2 \quad (6)$$

$$dE = dQ + dW \stackrel{\text{rev.}}{\equiv} TdS - PdV \quad dE = TdS - PdV + \mu dN \quad (7)$$

$$F = E - TS \quad G = E - TS + PV \quad H = E + PV \quad (8)$$

$$S = k_B \ln \Omega \quad \ln n! \approx n \ln n - n \quad \binom{N}{n} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (9)$$

$$F = -k_B T \ln Z \quad E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (10)$$

$$C_V \equiv T \left(\frac{dS}{dT} \right)_{V,N} = \left(\frac{dE}{dT} \right)_{V,N} \quad C_P \equiv T \left(\frac{dS}{dT} \right)_{P,N} \quad (11)$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dP} \right)_{T,N} \quad \kappa_S \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dP} \right)_{S,N} \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \quad (13)$$

$$S = -k_B \sum_{\nu} p_{\nu} \ln p_{\nu} \quad p_{\nu} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_{\nu}} \quad Z = \sum_{\nu} e^{-\beta E_{\nu}} \quad \beta \equiv 1/(k_B T) \quad (14)$$

$$PV = Nk_B T = nRT \quad E = \frac{3}{2} Nk_B T \quad \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1 \rightarrow 2}(T)}{T \Delta V} \quad (15)$$

$$\sinh x \equiv \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad \cosh x \equiv \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \quad \tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad (16)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (a+b)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} a^n b^{N-n} \quad (17)$$