FYSA242 STATISTINEN FYSIIKKA OSA B
Tentti pe 10.06.2011

1. Veden höyrynpaine lämpötiloissa $T = 4°C$, $5°C$ ja $6°C$ on vastaavasti 813 Pa, 872 Pa ja 935 Pa. Mikä on veden moolia kohti laskettu höyrystymislämpö lämpötilassa $T = 5°C$? [Vihje: käyttämällä lausekkeelle $\frac{dP}{dT} = f(P,T)$ kolmen tasavälisen pisteen diskretointia (T_1, T_2, T_3 siten, että $\Delta T = 1\mathrm{K}$), saat sille arvion $\frac{1}{2\mathrm{K}}(P_3 - P_1) = f(P_2, T_2)$.]

2. Kaksiatomisen molekyylin värähtelyjä voidaan hyvällä tarkkuudella pitää harmonisina värähtelyinä, joihin liittyy kulmataajuus ω. Harmonisen värähtelijän energiatilat ovat kvantittuneet siten, että $\varepsilon_r = \left(r + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$; $r = 0, 1, 2, \ldots$ Johda lauseke tällaisista molekyyleistä muodostuvan kaasun sisäisistä värähtelyvapausasteista tulevalle kontribuutiolle kaasun lämpökapasiteettiin. Minkä muodon tämä kontribuutio saa rajoilla $T \ll \hbar\omega$ ja $T \gg \hbar\omega$?

3. Debyen mallissa voidaan kidevärähtelyjen sisäenergia esittää muodossa

$$E = E_0 + \int_0^{\omega_D} \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} f(\omega)\mathrm{d}\omega,$$

missä katkaisutaajuus ω_D määräytyy normitusehdosta $N = \int_0^{\omega_D} f(\omega)\mathrm{d}\omega$. Yksiulotteiselle kiteelle on $f(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{L}{\pi v}\mathrm{d}\omega$, missä L on kiteen koko ja v kidevärähtelyjen etenemisnopeus. Määrää tässä tapauksessa ω_D annettujen parametrien funktiona. Osoita sitten, että matalissa lämpötiloissa, $k_B T \ll \hbar\omega_D$, kidevärähtelyjen lämpökapasiteetti on verrannollinen T:hen, ts. $C_V \propto T$.

4. Oletetaan, että kidevärähtelyjen vapaa energia saadaan N:n atomin muodostamalle kiteelle Einsteinin mallin mukaisesta lausekkeesta

$$F = -3Nk_B T \ln\left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_j}\right),$$

jossa kidevärähtelyjen energiatilat ovat $\varepsilon_j = \hbar\omega_0(j + \frac{1}{2})$. Laske kidevärähtelyjen lämpökapasiteetti.

5. Mustan kappaleen säteilyä voidaan tarkastella ideaalisena bosonikaasuna (fotonikaasuna), jonka hiukkaslukumäärä ei pysy vakiona. Energian $\hbar\omega$ omaavien fotonien keskimääräinen lukumäärä $\langle n(\omega)\rangle$ noudattaa siten Bosen-Einsteinin statistiikkaa tapauksessa $\mu = 0$. Samoin fotonien välillä $[\omega, \omega + d\omega]$ olevien tilojen lukumäärä on $f(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega$. Johda lauseke mustan kappaleen säteilyn fotonitiheydelle $n = \frac{\langle N\rangle}{V}$ lämpötilan T funktiona. Mikä on avaruudessa esiintyvän, ns. kolmen kelvinin taustasäteilyn fotonitiheys, kun se mittaustulosten mukaan on mustan kappaleen säteilyä, jonka lämpötila on 2,7 K? [Vihje: $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \approx 2,4$.]

6. Ideaalisen fermionikaasun tilojen tiheys nollalämpötilassa on

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= 4\pi V h^{-3}(2m)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}; \quad \varepsilon < \varepsilon_F, \\ f(\varepsilon) &= 0; \quad \varepsilon > \varepsilon_F, \end{aligned}$$

missä V on järjestelmän tilavuus, m fermionien massa ja h Planckin vakio. Laske tällöin fermionikaasun sisäenergia ja paine.