FYSA242 STATISTINEN FYSIIKKA OSA B
Tentti pe 13.05.2011

1. Clausiuksen-Clapeyronin yhtälöä voidaan käyttää höyrystymislämmön (latentin lämmön) määräämiseen, mikäli nestefaasin ja kaasufaasin välisen tasapainotilan paine (höyrynpaine) mitataan eri lämpötiloissa. Elohopean höyrynpaineelle on mitattu 100 °C:ssa arvo 37 Pa ja 120 °C:ssa arvo 101 Pa. Määrää näiden tulosten avulla elohopean keskimääräinen höyrystymislämpö tällä lämpötila-alueella. Muista, että $R = 8.31$ J/mol·K, $V_{kaasu} \gg V_{neste}$ ja että elohopeakaasua voi hyvin käsitellä ideaalikaasuna.

2. Kaksiatomisen molekyylin $(2\ell + 1)$-kertaisesti degeneroitujen rotaatiotilojen energiat ovat kvantittuneet siten, että
$$\varepsilon_\ell = \frac{\hbar^2}{2I}\ell(\ell+1); \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots,$$
missä I on molekyylin hitausmomentti. Vetymolekyylien hitausmomentti on $I = 4.7 \times 10^{-48}\text{m}^2\text{kg}$. Laske tämän molekyylin rotaatiolämpötila T_{rot}. Tarkastele vetymolekyylien rotaatiotilojen kontribuutiota vetykaasun moolia kohti laskettuun lämpökapasiteettiin rajalla $T \ll T_{rot}$. Laske erityisesti tämä kontribuutio lämpötilassa $T = 10$ K.

3. Oletetaan, että kidevärähtelyjen vapaa energia saadaan N:n atomin muodostamalle kiteelle Einsteinin mallin mukaisesta
$$F = -3Nk_BT\ln\left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_j}\right),$$
jossa kidevärähtelyjen energiatilat ovat $\varepsilon_j = \hbar\omega_0(j + \frac{1}{2})$. Laske kidevärähtelyjen lämpökapasiteetti.

4. Debyen mallissa voidaan kidevärähtelyjen sisäenergia esittää muodossa
$$E = E_0 + \int_0^{\omega_D} \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} f(\omega)\mathrm{d}\omega,$$
missä katkaisutaajuus ω_D määräytyy normitusehdosta $N = \int_0^{\omega_D} f(\omega)\mathrm{d}\omega$. Yksiulotteiselle kiteelle on $f(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{L}{\pi v}\mathrm{d}\omega$, missä L on kiteen koko ja v kidevärähtelyjen etenemisnopeus. Määrää tässä tapauksessa ω_D annettujen parametrien funktiona. Osoita sitten, että matalissa lämpötiloissa, $k_BT \ll \hbar\omega_D$, kidevärähtelyjen lämpökapasiteetti on verrannollinen T:hen, ts. $C_V \propto T$.

5. Mustan kappaleen säteilyä voidaan tarkastella ideaalisena bosonokaasuna (fotonikaasuna), jonka hiukkaslukumäärä ei pysy vakiona. Energian $\hbar\omega$ omaavien fotonien keskimääräinen lukumäärä $< n(\omega) >$ noudattaa siten Bosen-Einsteinin statistiikkaa tapauksessa $\mu = 0$. Samoin fotonien välillä $[\omega, \omega + d\omega]$ olevien tilojen lukumäärä on $f(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2c^3}\omega^2 d\omega$. Johda lauseke mustan kappaleen säteilyn fotonitiheydelle (lukumäärätiheydelle) $n =< N > /V$ lämpötilan T funktiona. Mikä on avaruudessa esiintyvän ns. kolmen kelvinin taustasäteilyn fotonitiheys, kun se mittaustulosten mukaan on mustan kappalen säteilyä, jonka lämpötila on 2,7 K? Vihje: $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{e^x-1} \approx 2,4$.

6. Ideaalisen fermionikaasun energiatilojen lukumäärä välillä $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ on $f(\varepsilon)d\varepsilon = 4\pi Vh^{-3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$, missä V on järjestelmän tilavuus, m fermionien massa ja h Planckin vakio. Johda fermienergian ε_F ja hiukkastiheyden N/V välinen yhtälö.

   Vihje: Lausekkeen $N = \int_0^\infty \langle n(\varepsilon)\rangle f(\varepsilon)d\varepsilon$ arvo nollalämpötilassa saattaa olla avuksi.