**FYSA242 STATISTINEN FYSIIKKA OSA B**
**Tentti pe 15.01.2010**

1. Veden höyrynpaine lämpötiloissa $T = 4°C$, $5°C$ ja $6°C$ on vastaavasti 813 Pa, 872 Pa ja 935 Pa. Mikä on veden moolia kohti laskettu höyrystymislämpö lämpötilassa $T = 5°C$?

   Vihje: käyttämällä lausekkeelle $\frac{dP}{dT} = f(P,T)$ kolmen tasavälisen pisteen diskretointia ($T_1, T_2, T_3$ siten, että $\Delta T = 1K$), saat sille arvion $\frac{1}{2K}(P_3 - P_1) = f(P_2, T_2)$.

2. Hiilidioksidimolekyylillä on mm. sellaiset degeneroitumattomat värähtelytilat, joiden energiat ovat $\varepsilon_r = \hbar\omega(r+1)$; $r = 0, 1, 2, \ldots$ , missä $\omega = 1.26 \times 10^{14}\ s^{-1}$. Mikä on näiden tilojen kontribuutio hiilidioksidikaasun moolia kohti laskettuun lämpökapasiteettiin lämpötilassa $T = 400$ K?

3. Hiilimonoksidimolekyylillä on sellaiset $(2\ell+1)$-kertaisesti degeneroituneet rotaatiotilat, joiden energiat ovat $\varepsilon_\ell = \frac{\hbar^2}{2I}\ell(\ell+1)$; $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ , missä $I = 1.3 \times 10^{-46}\ m^2kg$. Mikä on näiden tilojen kontribuutio hiilimonoksidikaasun moolia kohti laskettuun lämpökapasiteettiin lämpötilassa $T = 0.5$ K?

4. Debyen mallissa voidaan kidevärähtelyjen sisäenergia esittää muodossa

$$E = E_0 + \int_0^{\omega_D} \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} f(\omega) d\omega,$$

   missä katkaisutaajuus $\omega_D$ määräytyy normitusehdosta $N = \int_0^{\omega_D} f(\omega)d\omega$. Kaksiulotteiselle kiteelle on $f(\omega)d\omega = \frac{L^2}{\pi v^2}\omega d\omega$, missä $L^2$ on kiteen koko ja $v$ kidevärähtelyjen etenemisnopeus. Määrää tässä tapauksessa $\omega_D$ annettujen parametrien funktiona. Osoita sitten, että matalissa lämpötiloissa, $k_BT \ll \hbar\omega_D$, kidevärähtelyjen lämpökapasiteetti on verrannollinen $T^2$:een, ts. $C_V \propto T^2$.

5. Mustan kappaleen säteilyä voidaan tarkastella ideaalisena bosonikaasuna (fotonikaasuna), jonka hiukkaslukumäärä ei pysy vakiona. Energian $\hbar\omega$ omaavien fotonien keskimääräinen lukumäärä $\langle n(\omega)\rangle$ noudattaa siten Bosen-Einsteinin statistiikkaa tapauksessa $\mu = 0$. Samoin fotonien välillä $[\omega, \omega + d\omega]$ olevien tilojen lukumäärä on $f(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega$. Johda lauseke mustan kappaleen säteilyn fotonitiheydelle (lukumäärätiheydelle) $n = \frac{<N>}{V}$ lämpötilan $T$ funktiona. Mikä on avaruudessa esiintyvän ns. kolmen kelvinin taustasäteilyn fotonitiheys, kun se mittaustulosten mukaan on mustan kappaleen säteilyä, jonka lämpötila on 2,7 K?

   Vihje: $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \approx 2,4$.

6. Kun $T \ll T_F$, mielivaltaiselle integroituvalle funktiolle $\phi(\varepsilon)$ voidaan johtaa ns. Sommerfeldin kehitelmä

$$\int_0^\infty \frac{\phi(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} = \int_0^\mu \phi(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2 \frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=\mu} + \cdots \ .$$

   Johda tämän kehitelmän avulla ideaalisen fermikaasun kemialiselle potentiaalille lämpötilassa $T \ll T_F$ pätevä tulos

$$\mu(T) \simeq \varepsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12}(\frac{T}{T_F})^2\right).$$

$k_B \approx 1{,}3807 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{JK}^{-1}$ $\quad k_B \cdot 300\,\mathrm{K} \approx \frac{1}{40}\,\mathrm{eV}$ $\quad R \approx 8{,}3145\,\mathrm{J/mol\,K}$

$0\,°\mathrm{C} = 273{,}15\,\mathrm{K}$ $\quad c \approx 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ $\quad m_e c^2 \approx 511\,\mathrm{keV}$

$1\,\mathrm{atm} \approx 1{,}013 \cdot 10^5\,\mathrm{Nm}^{-2}$ $\quad g \approx 9{,}81\,\mathrm{ms}^{-2}$ $\quad \hbar \approx 1{,}0546 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$

$G \approx 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$ $\quad \mathrm{d}E = đQ + đW$ $\quad \mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$

$S = k_B \ln \Omega$ $\quad \ln n! \overset{n \gg 1}{\approx} n \ln n - n$ $\quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$S = -k_B \sum_r p_r \ln p_r$ $\quad p_r = \frac{1}{Z} \mathrm{e}^{-\beta E_r}$ $\quad Z = \sum_r \mathrm{e}^{-\beta E_r}$

$\beta = \frac{1}{k_B T}$ $\quad G = E - TS + PV$ $\quad F = E - TS$

$F = -k_B T \ln Z$ $\quad E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$ $\quad pV = N k_B T = nRT$

$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_{\mathrm{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{12}}{T \Delta V}$ $\quad Z_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{N!} Z_1^N$ $\quad Z_1^{\mathrm{tr}} = V \left(\frac{m k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$

$p(v)\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(m\beta)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\beta m v^2\right) \mathrm{d}v$ $\quad p_{N,r} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \mathrm{e}^{\beta(\mu N - E_{N,r})}$

$\Omega = -k_B T \ln \mathcal{Z} = E - TS - \mu N = -pV$ $\quad \mathcal{Z} = \sum_{N,r} \mathrm{e}^{\beta(\mu N - E_{N,r})}$

$\mathcal{Z} = \prod_r \mathcal{Z}_r = \prod_r \sum_{n_r=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\beta(\mu - \epsilon_r) n_r}$ $\quad \langle n_r \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon_r - \mu)} \pm 1}$

$u(\omega, T)\mathrm{d}\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 \mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega} - 1}$ $\quad \mu = \epsilon_{\mathrm{F}} \left(1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)^2 + \ldots\right)$

$k_B T_C \approx 3{,}3 \frac{\hbar}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$ $\quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$ $\quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = 1$

$\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ $\quad \cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ $\quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \overset{|z|<1}{=} \frac{1}{1-z}$ $\quad \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ $\quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$